ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 3 :: Februar 1923

:: Heft 1 :: Seite 1 bis 80

INHALT:



VERLAG DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

INHALTSÜBERSICHT

A. Verfasserverzeichnis

(H. = Hauptaufsätze, Z. B. = Zusammenfassende Berichte, K. A. = Kurze Auszüge, Kl. M. = Kleine Mitteilungen, Bb. = Buchbesprechungen, N. = Nachrichten, Z. = Zuschriften an den Herausgeber.)

B. Sachverzeichnis

Aeromechanik und Flugtechnik.

Praktische Analysis.

C. Buchbesprechungen und Kurze Auszüge

(Bb. = Buchbesprechungen, K. A. = Kurze Auszüge. Der Name des Referenten ist in Klammern beigesetzt.)

Z
N
IN
Bo

Zu
Ha

E

J
E

E

Zu

Ku
Kl

Z
Sc
ei
ur
st
lei

da
me
ge
wi
zu
ba
me
nic
öff
ge
de
be
Ve
vo
Ei
ei
Zi

Au
W

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Bd. 3 **Ende Februar 1923** **Heft 1**

Inhalt:

Zum dritten Jahrgang.

An die Mitarbeiter und Leser!

Zwei Jahre des Bestehens sind für eine Zeitschrift nicht viel und mögen im allgemeinen noch keinen Anlaß zu prüfender Rückschau bieten. Wenn aber unter den gegenwärtigen Verhältnissen in Deutschland, gegenüber ständig wachsenden äußeren Schwierigkeiten, ein neugegründetes und neuartiges wissenschaftliches Unternehmen sich einigermaßen behauptet hat, so darf dies vielleicht als ein Beweis für seine Berechtigung und für seine Lebensfähigkeit angesehen werden. Daß nicht alles erreicht ist, was angestrebt wurde und viele Wünsche unerfüllt bleiben mußten, kann für Verlag und Schriftleitung nur ein Ansporn sein, im Rahmen des Möglichen nach Verbesserung zu suchen.

In einem Punkte vor allem sind die beiden ersten Jahrgänge hinter dem Programm, das die Schriftleitung aufgestellt hatte, zurückgeblieben: die Gleichberechtigung experimenteller und deduktiver Forschung ist in der bisherigen Verteilung der Aufsätze nicht genügend zum Ausdruck gekommen. Der tiefere Grund dieser Erscheinung liegt in den wirtschaftlichen Verhältnissen, die alle Stätten experimenteller Forschung in Deutschland zu den größten Einschränkungen ihrer Arbeit zwingen, und entzieht sich somit der unmittelbaren Einflußnahme der Schriftleitung. Um aber von jetzt an alles hierher Gehörige möglichst vollständig für die Zeitschrift zu sammeln, ist mit dem Verein deutscher Ingenieure ein Uebereinkommen geschlossen worden, wonach die früher in Einzelheften veröffentlichten »Mitteilungen über Forschungsarbeiten«, soweit ihr Gegenstand in das Stoffgebiet der Zeitschrift fällt, künftig in dieser aufgehen sollen. Der Zusatz zum Namen der Zeitschrift »Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten« soll diese Vereinigung der beiden Unternehmungen des V. d. I. auch nach außen hin dokumentieren. Vier größere Versuchsberichte aus verschiedenen Gebieten der Ingenieurwissenschaften sind bereits von der Schriftleitung angenommen und werden demnächst zur Veröffentlichung gelangen. Einen Zerfall der Ingenieurwissenschaften in einen experimentellen und einen theoretischen Teil halten wir für schädlich, und es soll gerade ein Ziel unserer Zeitschrift sein, dem entgegenzuwirken.

Noch eine zweite Beziehung will der neue, erweiterte Name der Zeitschrift zum Ausdruck bringen. Im vergangenen September haben sich in Leipzig die Vertreter der Wissenschaftsgebiete, die in dieser Zeitschrift behandelt werden, zu einer Gesellschaft

zusammengeschlossen, die vorläufig den Doppelnamen führt »Deutsche Ingenieurwissenschaftliche Vereinigung, Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik«. Aehnliche Gesichtspunkte wie die, von denen bei Begründung der Zeitschrift ausgegangen war, haben zur Errichtung der Gesellschaft geführt: Der Wunsch, die theoretischen Grundwissenschaften der Technik in unmittelbarem Zusammenhang mit ihren Anwendungen durch Vorträge und Aussprachen auf jährlich stattfindenden Versammlungen zu pflegen und auf diese Weise der deutschen Industrie neue und vertiefte Anregungen zu geben. Dem gemeinsamen Endziel hofft die Zeitschrift künftig in enger Fühlungnahme mit der Gesellschaft, deren Publikationsorgan sie werden soll, zustreben zu können.

Aus dem Kreise der Leser ist wiederholt die Klage laut geworden, daß viele Aufsätze zu schwer verständlich seien und mathematische Kenntnisse voraussetzten, die dem wissenschaftlich gebildeten Ingenieur nicht geläufig sind. Die Schriftleitung muß anerkennen, daß hier ein Mangel vorliegt, und sie bedauert, daß ihre ständige Einwirkung auf die Verfasser in diesem Sinne nicht von besserem Erfolge begleitet war. Sie richtet hiermit erneut an alle Mitarbeiter die dringende Bitte, nie zu vergessen, daß nicht jedem Leser gerade die Ueberlegungen zur Hand sein können, die den Verfasser, da sie zu seinem Problemkreis gehören, seit langem beschäftigen, und daß Klarheit, Einfachheit und Uebersichtlichkeit der Darstellung sich sehr wohl mit wissenschaftlichem Wert einer Arbeit verträgt. Wird diesen Anforderungen Rechnung getragen, so werden auch die Leser gern anerkennen, daß es gelegentlich Aufgabe der Forschung und Pflicht der Forschenden sein muß, über den allgemeinen Besitzstand an Kenntnissen hinauszugreifen und neue, bisher unbenutzte Hilfsmittel heranzuziehen. Die Schriftleitung will jedenfalls bemüht sein, den Inhalt der Zeitschrift, ohne ihren wissenschaftlichen Charakter zu schmälern, den Bedürfnissen und Anforderungen der Ingenieure noch mehr als bisher anzupassen.

So hoffen wir denn, im neuen Jahre unserer Zeitschrift nicht nur die alten Freunde erhalten, sondern in recht großer Zahl auch neue gewinnen zu können.

Berlin, im Januar 1923.

Der Herausgeber.

HAUPTAUFSÄTZE

Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauhigkeitsgrades.

Von **L. SCHILLER** in Leipzig.

Während bis vor nicht allzulanger Zeit auf dem Gebiet der Hydrodynamik Experiment und Praxis einerseits und die Theorie andererseits sich ziemlich fremd gegenüberstanden, ist hier neuerdings eine erfreuliche Wendung zu verzeichnen. Alle Fortschritte in dieser Richtung beruhen mehr oder weniger auf mechanischen Aehnlichkeitsbetrachtungen. Mit den neuesten in dieser Richtung liegenden Arbeiten von Prandtl-v. Kármán[1]) scheint eine sehr aussichtsreiche Verbindung der Theorie mit Ausnützung experimenteller Befunde eingeleitet zu sein. Da die Ergebnisse dieser theoretischen Arbeitsmethode zum Teil auf empirischen Gesetzen fußen, ist deren Sicherung natürlich doppelt bedeutungsvoll. Von diesem Gesichtspunkt aus betrachtet dürfen vielleicht die im folgenden wiedergegebenen Messungen von Widerständen an Rohrleitungen verschiedenen Querschnitts und Rauhigkeitsgrades ein gewisses Interesse beanspruchen. Ich habe sie gelegentlich mehrerer Besuche im Göttinger Institut für angewandte Mechanik in den Jahren 1919, 1920 und 1921 ausgeführt und möchte auch an dieser Stelle Herrn Professor Prandtl für sein in jeder Richtung bewiesenes Entgegenkommen herzlichst danken.

Der Widerstand dreier gezogener Messingrohre von 8, 16 und 24 mm l. W. ergab sich innerhalb des Meßbereichs [bis Reynoldssche Zahl $R = 200\,000$[2])] in recht guter

[1]) Th. v. Kármán, Ueber laminare und turbulente Reibung, ds. Ztschr. 1, 233, 1921.

[2]) Bezogen auf Radius (vergl. S. 3!).

Uebereinstimmung mit dem Blasiusschen Widerstandsgesetz (Abschnitt I). Widerstandsmessungen an drei eben solchen Rohren von 8, 16 und 21 mm l. W., denen durch zweierlei Gewinde verschiedene »Rauhigkeiten« erteilt waren, zeigten im Bereich bis $R = 120000$ ein ziemlich verwickeltes Bild, nach dem es fraglich erscheint, ob man hier zur Aufstellung eines einfachen Widerstandsgesetzes für rauhe Rohre kommen kann. Immerhin lassen die Messungen die Gültigkeit des Prandtl-Kármánschen Gesetzes, nach dem der Widerstand proportional der $^2/_7$. Potenz der relativen Rauhigkeit wächst, bei sehr hohen R-Werten als durchaus möglich erscheinen (II). Messungen an verschiedenen Profilrohren lieferten im laminaren Bereich gute Uebereinstimmung mit theoretischen Lösungen, die von Boussinesq angegeben wurden, und zeigten im turbulenten Bereich eine gute, teilweise ausgezeichnete Bewährung des »hydraulischen Radius«, d. h. das Blasiussche Gesetz ergab sich auch für Profilrohre bei Einführung des »Profilradius« als in weiten Grenzen gültig. Durch Kombination einer von v. Mises aufgestellten Beziehung zwischen dem Widerstand rauher Rohre von kreisförmigem und anderem Querschnitt und einer solchen von v. Kármán zwischen dem Widerstand glatter und rauher Rohre von Kreisquerschnitt wird die Gültigkeit des Blasiusschen Gesetzes in dieser verallgemeinerten Form plausibel gemacht (III).

I. Das Widerstandsgesetz für glatte Rohre.

1. Versuchsergebnisse und Formulierungen des Gesetzes aus jüngerer Zeit. Der Fall des glatten Rohres stellt einen für die praktische Hydraulik nicht allzu wichtigen Grenzfall dar. Der Techniker wird vielmehr verlangen müssen, daß das Widerstandsgesetz auch eine Angabe enthält, in welcher Weise die Wandbeschaffenheit in Rechnung zu setzen ist. Bei der außerordentlichen Verschiedenheit der möglichen Rauhigkeiten bedeutet dieses Beginnen natürlich eine wesentliche Erschwerung. So ist es, wenigstens vom Standpunkt des theoretischen Klärungsbedürfnisses aus, durchaus gerechtfertigt, erst einmal an Hand des verfügbaren Beobachtungsmaterials nach dem Gesetz für glatte[1]) Wandungen zu fragen und von da an weitergehend in systematisch aufgebauten Versuchen das Rauhigkeitsgesetz zu erforschen. Für die erstere Aufgabe sind in jüngerer Zeit einige wichtige Arbeiten geleistet worden, deren gleichzeitiges Verdienst noch darin besteht, daß sie im Gegensatz zu zahlreichen älteren in Darstellung und Folgerungen auf dem Standpunkt der mechanischen Aehnlichkeit stehen.

Blasius[2]) leitete aus dem außerordentlich reichhaltigen und augenscheinlich sehr guten Material von Saph und Schoder[3]) für den durch die Gleichung

$$\varDelta p = \lambda \gamma \frac{l}{a} \frac{\bar{u}^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

($\varDelta p$ = Druckdifferenz an den Enden der Meßstrecke l, γ = spez. Gew., $\frac{\bar{u}^2}{2g}$ = Höhe der mittl. Geschw., a = Halbmesser)

definierten Widerstandskoeffizienten λ die Beziehung ab

$$\lambda_{turb} = \frac{0,1582}{\sqrt[4]{2R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

$$\left(R = \frac{\bar{u}\, a}{\nu} = \frac{\bar{u}\, a\, \varrho}{\mu} = \text{Reynoldssche Zahl}; \ \mu = \text{Zähigkeit}, \ \varrho = \text{Dichte.}\right)$$

Die Messungen von Saph und Schoder waren mit Wasser ausgeführt, erstreckten sich bis zu $R = 50000$ und schmiegen sich der Blasiusschen Interpolation sehr gut an, was für eigene Versuche von Blasius nicht durchweg gilt.

In zweiter Linie ist zu nennen eine Arbeit von Ombeck[4]), der aus ebenfalls großem eigenen Versuchsmaterial, das mit Luft gewonnen wurde, für λ findet:

$$\lambda = \frac{0,121}{\sqrt[4,47]{2R}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

[1]) Dies erscheint um so berechtigter, als ein Einfluß geringerer Rauhigkeiten, wie schwache Korrosion usw. innerhalb der sonstigen Versuchsfehler zu liegen scheint.

[2]) H. Blasius, Das Aehnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. Mitteil. üb. Forschungsarb., herausgeg. v. Ver. deutsch. Ing. H. 131, 1913.

[3]) A. V. Saph und E. H. Schoder, An experimental study of the resistances to the flow of water in pipes. Trans. of the Am. Soc. of civ. eng. 51, S. 253, 1903.

[4]) H. Ombeck, Druckverlust strömender Luft in geraden zylindrischen Rohrleitungen. Forschungsarb. auf d. Geb. des Ing.-Wesens, herausgeg. v. Ver. deutsch. Ing. H. 158 u. 159, 1914.

Diese λ-Werte stimmen mit (2) überein bei etwa $R = 20\,000$, liegen bei niedrigeren R-Werten tiefer, bei höheren höher (vergl. Abb. 1). Die Abweichungen von (2) liegen nach der bei Ombeck gegebenen graphischen Darstellung nicht mehr innerhalb der Streuung der Beobachtungen, die sich bis $R = 240\,000$ erstrecken.

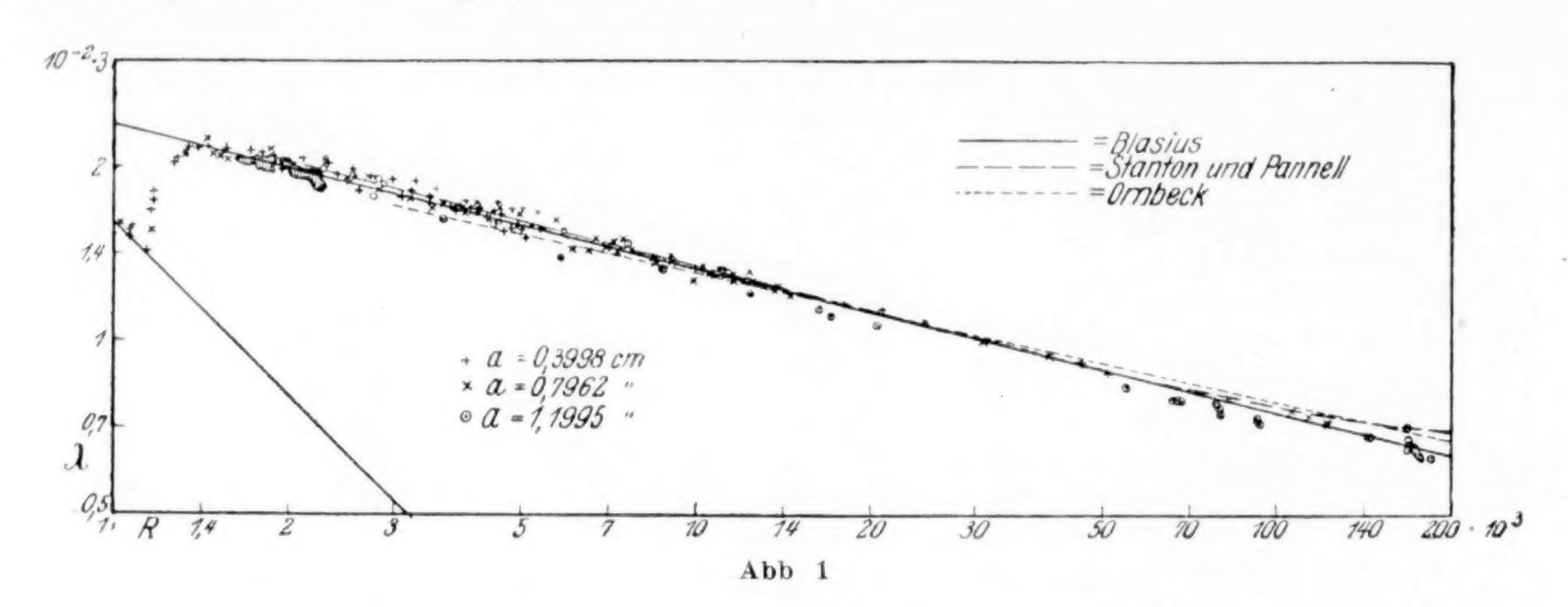


Abb 1

Als dritte große Arbeit schließt sich eine ausführliche Untersuchung von Stanton und Pannell[1]) an, die sowohl mit Wasser als mit Luft Messungen bis $R = 215\,000$ ausführten. Auch sie zogen — augenscheinlich in Unkenntnis der Blasiusschen Arbeit — die Saph-Schoderschen Messungen zum Vergleich heran. Die Kurve der Stanton-Pannellschen Messungen berührt die Blasiussche Kurve bei $R = 50\,000$ und läuft bei kleineren und größeren R-Werten oberhalb derselben (vergl. Abb. 1). So ergibt sich z. B. für ein Rohr, ähnlich wie für andere, ein allmähliches Anwachsen des Exponenten der Geschwindigkeit im Widerstandsgesetz von 1,72 bis 1,92 im Bereich $R = 2000$ bis 200 000. Stanton und Pannell stellen sich hiernach auf den Standpunkt, daß ein Potenzgesetz für den Widerstand über einen nennenswerten Bereich weg nicht in Frage kommt.

2. Eigene Messungen. Als Versuchseinrichtung für niedrige Reynoldssche Zahlen diente die in dieser Zeitschrift[2]) bereits früher beschriebene Anordnung. Für die höheren Reynoldsschen Zahlen stand eine Differentialpumpe mit 7,5 l/sec. Maximallieferung zur Verfügung[3]), die das Wasser aus einem unter dem Boden des Maschinenhauses befindlichen Behälter ansaugte und in einen Windkessel von 2 cbm Inhalt beförderte. An diesen war das Versuchsrohr angesetzt, durch das sich das Wasser in einen Meßbottich entleerte. Die Mengenmessung erfolgte entweder unmittelbar aus der Steiggeschwindigkeit eines Schwimmers oder aus der konstanten Einstellung des Schwimmers[4]) bei Oeffnung eines oder zweier Bodenlöcher, durch die sich das Wasser in den oben erwähnten Behälter ergoß.

Als Versuchsrohre dienten drei gezogene Messingrohre von 0,3998, 0,7962 und 1,1995 cm Halbmesser und 2 m Länge. Die Wandung der zwei weiteren Rohre war noch recht gut glänzend, die des engeren weniger. Die Meßstrecke betrug im allgemeinen rd. 104 cm, die Anlaufstrecke rd. 93 cm (über Ausnahmen s. u.!). Die Ergebnisse der Messungen sind in Abb. 1 in logarithmischem Maßstab eingetragen. Abszisse ist die Reynoldssche Zahl R (s. o. bei Gl. (2)), Ordinate der durch Gl. (1) definierte Widerstandskoeffizient. Die beiden ausgezogenen Geraden stellen das Poiseuillesche Gesetz der Laminarströmung und das Blasiussche Gesetz (s. o. Gl. (2)) der turbulenten Strömung dar. Die wiedergegebenen Versuche enthalten das gesamte im turbulenten Bereich

[1]) T. E. Stanton und J. R. Pannell, Similarity of motion in relation to the surface friction of fluids. Philos. Transact. of the Roy. Soc. of Lond. A. 214, S. 199 bis 224, 1914.

[2]) L. Schiller, Diese Zeitschr. 1, S. 436, 1921.

[3]) Nähere Beschreibung der Anordnung s. bei H. Hochschild, Versuche über die Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen. Mitt. üb. Forschungsarb., herausgeg. v. Ver. deutsch. Ing. H. 114, 1910.

[4]) Ueber die Eichung s. a. a. O. S. 11/12.

gewonnene Material [1]), soweit nicht ausdrücklich Fehlerquellen (z. B. Undichtigkeiten des Meßbottichs) festgestellt wurden, und enthalten so insbesondere auch früher gemachte Messungen mit noch nicht so gut ausgebildeter Versuchstechnik. Dadurch erklären sich zum Teil die an manchen Stellen etwas größeren Streuungen, die sich wohl im einzelnen näher diskutieren ließen. Hier mag jedoch die Feststellung genügen, daß mit fortschreitender Versuchstechnik stets eine immer bessere Annäherung an die Blasiussche Gerade eintrat. Die in Abb. 1 schraffiert gezeichneten Gebiete sind so dicht mit Versuchspunkten besetzt, daß in dem gewählten Maßstab es nicht möglich wäre, sie einzeln einzuzeichnen. Ein Unterschied zwischen dem engen und mittleren Rohre ist nicht festzustellen; das weite Rohr liegt etwas tiefer. Im allgemeinen gruppieren sich jedenfalls unsere Versuche bis zu den höchsten R recht gut um die Blasiussche Gerade, die wir sonach als durchaus geeignet bezeichnen müssen, den turbulenten Widerstand glatter Rohre bis etwa $R = 200\,000$ darzustellen, also weit hinaus über den Bereich der Saph-Schoderschen Versuche (bis $R = 50\,000$), nach denen sie Blasius aufgestellt hat. Weniger gut gilt dies für die höheren R nach den Versuchen von Stanton und Pannell und denen von Ombeck, die bei höheren R-Werten höhere λ liefern, für die jedoch, soweit sie Versuche mit Wasser betreffen, unten eine mögliche Fehlerquelle diskutiert wird. Die etwas niedrigeren λ-Werte von Ombeck bei kleineren R (nur sehr wenige Punkte!) dürften in Anbetracht der guten Uebereinstimmung der anderweitigen Resultate wohl zu niedrig liegen.

Zur Illustration der obigen Behauptung, daß die zuverlässigsten Versuche besonders gut an der Blasiusschen Kurve lagen, mögen noch einige der späteren mit besserer Versuchstechnik ausgeführten Versuche dienen, wobei gleichzeitig der Einfluß einer Fehlerquelle zutage tritt, die möglicherweise auch bei anderen Autoren eine Rolle spielt.

Man wird annehmen müssen, daß auch das technisch »glatte« Rohr bei steigender Reynoldsscher Zahl schließlich sich als »hydrodynamisch rauh« erweisen wird und zwar dann, wenn die — mit steigender Reynoldsscher Zahl abnehmende — Grenzschichtdicke von der Größenordnung der »mikroskopischen Rauhigkeit« wird. Zu einer Abschätzung der Grenzschichtdicke δ setzen wir das Geschwindigkeitsgefälle an der Wand

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{\bar{u}}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

und erhalten wegen des beim stationären Zustand herrschenden Gleichgewichts zwischen Reibung und Druckkraft

$$\mu \frac{\bar{u}}{\delta} 2\pi a = \frac{\lambda \bar{u}^2 \gamma}{2 g a} a^2 \pi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

woraus sich die Grenzschichtdicke δ berechnet zu:

$$\delta = \frac{4a}{R\lambda} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Für $a = 0{,}4$ cm (entsprechend unserem engen Versuchsrohr) und $R = 20\,000$ (d. h. $\lambda = 0{,}0112$) erhält man so eine Grenzschichtdicke von 0,07 mm. Nimmt man an, daß die »Rauhigkeit« des glatten Rohrs von ähnlicher Größenordnung ist, so wird man von $R = 20\,000$ ab einen Einfluß der Rauhigkeit auf λ erwarten können. Für ein Rohr von 0,8 cm Halbmesser und gleicher Wandbeschaffenheit erhält man als entsprechenden R-Wert etwa 50000. Tatsächlich erhielt ich bei Versuchen, die in der oben angegebenen Weise, d. h. mit dem halben Rohr als Anlaufstrecke und der zweiten Hälfte als Meßstrecke, angestellt wurden, das in Abb. 2 gegebene Bild, bei dem engen Rohr von etwa $R = 18\,000$ an, bei dem mittlerer Weite von etwa 35000 an eine mit wachsendem R stetig steigende Abweichung von der Blasiusschen Kurve des »glatten Rohres« im Sinne größeren Widerstandes. Es stellte sich jedoch heraus, daß hier

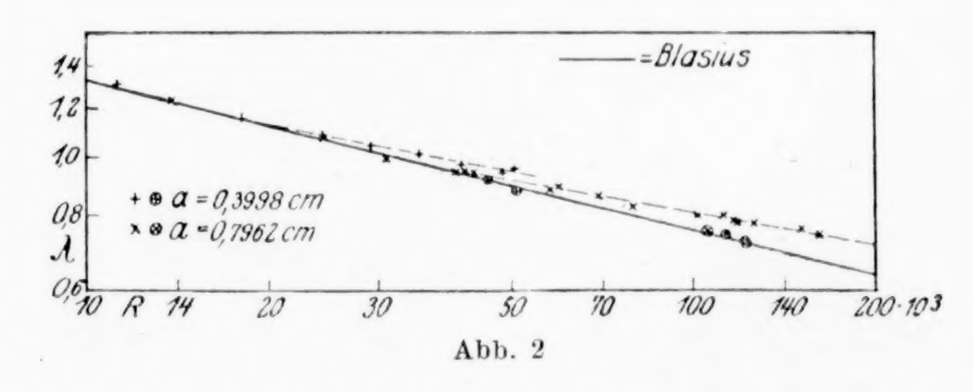


Abb. 2

[1]) Die Punkte, die den Uebergang vom laminaren zum turbulenten Ast darstellen, entsprechen stärkster Einlaufstörung und langer Anlaufstrecke (vergl. L. Schiller, diese Zeitschr. 1, S. 443, Abb. 7, 1921).

nicht ein Rauhigkeitseinfluß, sondern ein anderer Grund vorlag. Zur Erzielung der höheren Reynoldsschen Zahlen mußte nämlich die Luft im Windkessel auf Drucke bis zu 10 Atm. gebracht werden. Die bei diesen höheren Drucken in erhöhtem Maße im Wasser absorbierte Luft scheidet sich auf dem Wege bis zum Ausflußende des Rohres, insbesondere in den letzten unter niedrigerem Druck stehenden Teilen in Blasenform aus [1]), was, schon wegen der dadurch bedingten Querschnittsverminderung, einen höheren Widerstand bedingt. Daß dies der wirkliche Grund war, ergaben Kontrollversuche, bei denen nicht die zweite Rohrhälfte, sondern das zweite Viertel als Meßstrecke benutzt wurde, so daß die Luftausscheidung im wesentlichen erst hinter der Meßstrecke erfolgen mußte. Hierbei ergaben sich λ-Werte, die wieder dicht an der Blasius-Geraden lagen (in Abb. 2 als Kreise eingetragen). Man wird wohl annehmen dürfen, daß auch die in Abb. 1 ersichtliche Erhöhung des λ-Wertes, die die Stanton und Pannellschen Versuche bei den höchsten R-Werten ergaben, auf den gleichen Grund zurückzuführen ist, zumal fast nur Versuche mit Wasser bei hohen R-Werten dort verzeichnet sind und die wenigen Versuche mit Luft verhältnismäßig kleine λ-Werte geben. Auch weichen die λ-Werte für das engste Rohr schon bei kleineren R von der Blasiusschen Geraden ab, was zu dieser Deutung stimmt. Das Gleiche gilt wohl auch für andere neuere einschlägige Versuche mit Wasser von Camichel [2]) an einem Rohr von 0,29 cm l. W., in denen er mit einem Ausgangsdruck von 150 Atm. bis $R = 100\,000$ kam. Auf eine nähere Diskussion seiner Resultate möchten wir verzichten, da sie auch sonst sehr von den sonstigen abweichen.

II. Der Widerstand rauher Rohre.

1. Allgemeines über das Widerstandsgesetz bei rauher Wandung. Während man, wie wir im 1. Teil gesehen haben, in der Blasiusschen Gleichung ein Gesetz besitzt, das für glatte Wandungen über einen außerordentlich großen Bereich sich mit der Erfahrung deckt und gleichzeitig in seinem Bau den theoretischen Anforderungen der Aehnlichkeitsmechanik entspricht, ist für den der Praxis besonders am Herzen gelegenen Fall rauher Wandungen hier bis zur Erreichung des gleichen Zieles sicher noch manche Arbeit zu leisten. Die hier bestehende Unsicherheit prägt sich am deutlichsten darin aus, daß ungefähr ebenso viel Gesetze in der Literatur sich finden als Versuchsreihen — und es sind deren nicht wenige —, wovon man sich durch einen Blick in irgend eine zusammenfassende Darstellung leicht überzeugen kann. Auch hier gilt wieder, daß eine große Zahl der empirischen Gesetze den Aehnlichkeitsbedingungen keine Rechnung trägt.

Blasius [3]) und v. Mises [4]) führen die »relative Rauhigkeit« in der Form $\varkappa = \frac{\varepsilon}{a}$ ein, wo ε, die »absolute Rauhigkeit«, die Dimension einer Länge hat und lediglich von der Form und Größe der Erhebungen abhängt. Einer freundlichen Mitteilung des Herrn Hopf [5]) verdanke ich die Kenntnis bisher nicht veröffentlichter, von ihm angestellter experimenteller Untersuchungen, durch die festgestellt ist, daß die hydraulische »relative Rauhigkeit« tatsächlich nicht noch von anderen Größen (Zähigkeit, Geschwindigkeit) abhängt, daß also die an und für sich wahrscheinliche obige Form $\frac{\varepsilon}{a}$ berechtigt ist. Ebenso wie Blasius das vorliegende Versuchsmaterial für noch nicht ausreichend erachtet, um ein Widerstandsgesetz für rauhe Rohre darauf zu gründen, so stellt auch v. Mises (a. a. O. S. 62) nur mit allem Vorbehalt, im wesentlichen auf Versuche von Darcy aufbauend, ein solches in der theoretisch richtigen Form $\lambda = f(R, \varkappa)$ auf.

Bei der technischen Bedeutung der Frage erscheint nach dem Gesagten die Anstellung weiterer Versuche in dieser Richtung geboten [6]). Obenan steht hier unseres Erachtens die Frage, ob es möglich ist, was augenscheinlich bisher (vergl. z B. Blasius und v. Mises) stillschweigend angenommen wurde, das Widerstandsgesetz für alle vorkommenden Rauhigkeiten durch eine einparametrige Schar von λ-R-Kurven darzustellen.

[1]) vergl. hierzu H. Hochschild, a. a. O. S. 19.

[2]) Camichel, Compt. rend. Paris 167, S. 525, 1918.

[3]) H. Blasius, a. a O. S. 20.

[4]) R. v. Mises, Elemente der technischen Hydromechanik, I. Teil, Leipzig 1914, S. 62.

[5]) vergl. hierzu auch L. Hopf, Modellversuche über Wasserführung von Kanälen. »Die Wasserkraft und Energiewirtschaft« 2, S. 58, 1920.

[6]) Unbeschadet der in der Zeitschrift d. Ver. deutsch. Ing. 66, S. 506, 1922 als wünschenswert bezeichneten dimensionslosen Darstellung der bei Biel (Forschungsheft 44) zusammengestellten älteren Arbeiten.

Mit anderen Worten: Können wir wirklich schließen, daß »wenn zwei Rohre bei irgend einem Wert von R dasselbe λ ergeben, ihre λ-R-Kurven auch weiterhin zusammenfallen« (Blasius)? Das vorliegende Versuchsmaterial gestattet die sichere Bejahung dieser Frage keineswegs. Vielmehr wird man hier zu Bedenken neigen in der Ueberlegung, daß die Rauhigkeiten selbst schon geometrisch nicht durch einen einzigen Parameter zu charakterisieren sind. Dazu kommen die experimentellen Erfahrungen über den Widerstand verschiedener Versuchskörper (Ballonmodelle [1]), Streben [2])), an denen man erkennt, durch welch geringe Aenderungen der Oberflächenbeschaffenheit ein gänzlich anderer Verlauf der Widerstandskurve hervorgerufen werden kann. Man wird wohl nicht fehlgehen in der Annahme, daß diese Tatsachen sich auch in den λ-R-Kurven von Rohren und Kanälen mit rauher Wandung widerspiegeln werden, eine Annahme, in der man bei Betrachtung der graphischen Zusammenstellung von Versuchsresultaten bei Blasius (a. a. O. Abb. 2) bis zu einem gewissen Grade bestärkt wird.

2. Eigene Untersuchungen. Das vorhandene experimentelle Material leidet großenteils daran, daß der Versuchsbereich sich jeweils nur über einen verhältnismäßig kleinen R-Bereich erstreckt, so daß man keinen rechten Ueberblick über den Verlauf der Widerstandskurven im großen daraus erhalten kann. Ich habe daher die im folgenden wiedergegebenen Messungen in erster Linie deswegen angestellt, um mit Hilfe der dazu besonders geeigneten Göttinger Einrichtungen für eine Anzahl von Rohren mit möglichst genau definierter Rauhigkeit (ähnlicher Form, also eines Parameters) die λ-Kurve über einen größeren Bereich Reynoldsscher Zahlen aufzunehmen. Gleichzeitig schien auf diese Weise die Möglichkeit einer Prüfung der interessanten neueren Prandtl-Kármánschen Rechnungen [3]) gegeben. Für Rohre kreisförmigen Querschnitts sprach bei diesen Untersuchungen der Umstand, daß hier am leichtesten die Rauhigkeit auf der ganzen Wandung anzubringen war, was wegen der Forderung nach einem Rauhigkeitsparameter nicht ganz unwesentlich erscheint.

Als »rauhwandiges« Versuchsmaterial dienten gezogene Messingrohre von 8,16 und 21 mm l. W., in deren Wandung normales (eingängiges) Löwenherzgewinde von 0,8 mm Steigung und 0,6 mm Gangtiefe eingeschnitten wurde, ferner zwei mit 8 und 16 mm l. W. und Löwenherzgewinde von 0,4 mm Steigung und 0,3 mm Gangtiefe. Leider war keine Gelegenheit gegeben, ein rechts- und ein linksgängiges Gewinde übereinander zu schneiden. Jedoch ist die Gefahr einer Rotation der Strömung wegen der geringen Ganghöhe nicht allzu groß. Hr. v. Mises hat in der Diskussion zu meinem letztjährigen Vortrag in Jena [4]) Bedenken gegen eine derartig regelmäßige Rauhigkeit geäußert, da es »möglich ist, daß gerade die statistische Unregelmäßigkeit der Unebenheit von Bedeutung sein könnte«. Dasselbe Bedenken, das sich dort auf die Frage der kritischen Zahl rauher Rohre bezog, kann man auch bei der Feststellung des Widerstandsgesetzes mit solchen Rohren haben. Ich glaube jedoch mit Herrn Hopf (vergl. dessen Diskussionsbemerkung a. a. O.), daß der ganze Charakter des sich ergebenden hydraulischen Widerstands auch diese Gewinderohre als »hydraulisch rauh« erkennen läßt. Eine etwaige Ordnung der Strömungselemente (Wirbelverteilung usw.) infolge der geordneten Wandbeschaffenheit wird sich wohl nur bis in die kleinsten Abstände von der Wand erstrecken. An dieser Stelle ist zu erwähnen, daß Stanton und Pannell [5]) ähnliche Versuche mit drei Rohren verschiedener Weite angestellt haben, denen sie durch ein eingeschnittenes Rechts- und Linksgewinde ähnliche Rauhigkeit verliehen. Aus ihren leider etwas lückenhaften und mir nicht in allen Punkten ganz klaren Angaben folgt jedenfalls für den augenscheinlich nicht sehr großen Bereich der untersuchten Reynoldsschen Zahlen ein Anwachsen des Widerstands mit einer etwas höheren Potenz der Geschwindigkeit als der zweiten.

Die Länge der Versuchsrohre betrug durchweg 2 m. Bei dem 8- und 16-mm-Rohr trug die eine Hälfte das feine, die andere das grobe Gewinde. Zum Versuch wurde

[1]) C. Wieselsberger, Aehnlichkeitsuntersuchungen an Ballonmodellen und Versuche über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit. Z. f. Flugt. u. Motorluftschiff. 6, S. 125, 1915.

[2]) C. Wieselsberger, Der Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit auf den Widerstand, untersucht an Streben. Z. f. Flugt. u. Motorluftsch. 11, S. 54, 1920.

[3]) Th. v. Kármán, a. a. O. S. 250 ff.

[4]) L. Schiller, Experimentelle Feststellungen zum Turbulenzproblem, Phys. Zeitschr. 23. 19, 1922.

[5]) T. E. Stanton und J. R. Pannell, Note on the frictional Resistances of Surfaces in a current of air as affected by the dimensions and roughness of the surface. Aëron. Techn. rep. 1910/11, S. 28.

jeweils der zu untersuchende Teil an den Vorratskessel angeschlossen, so daß das erste Viertel des Rohres als »Anlaufstrecke« und das zweite als Meßstrecke diente. Bei dem 21-mm-Rohr war das Gewinde nur in die eine Hälfte eingeschnitten, die andere blieb blank. Die »Anlaufstrecke« war infolge dieser Anordnung nicht allzu lang (zwischen 63 und 25 Durchmessern), was jedoch gerade bei stark rauher Wandung im turbulenten Bereich verhältnismäßig unbedenklich erscheint, da man hier gleich vom Einlauf an mit beträchtlicher Durchwirbelung wird rechnen dürfen[1]. Zudem bietet die Einschaltung einer längeren Rohrstrecke hinter der Meßstrecke den Vorteil, daß man bei den höheren Drucken nicht mit Ausscheidung von Luft innerhalb der Meßstrecke rechnen muß. Schließlich ergab gelegentliche Veränderung der Meßstrecke, die im Fall des feineren Gewindes vorgenommen wurde, um einen event. Einfluß des nachfolgenden grob-rauhen Teiles zu erkennen, keine Veränderung des Widerstandes.

Die Ergebnisse der Messungen an den 5 Rohrteilen sind in Abb. 3 niedergelegt. Durch die Versuchspunkte sind Kurven gelegt, deren Bezeichnung angibt, auf welche Rohrweite und welches Gewinde sie sich beziehen (gr = grobes Gewinde, f = feines Gewinde). Soweit die Messungen bie zu kleinen R-Werten reichen, erkennt man, daß die kritische Zahl etwa bei 1400 liegt[2]. Naturgemäß machen sich die »Einlaufstörungen« bei dem weiten Rohr (16 mm), insbesondere mit grobem Gewinde, infolge der relativ kürzeren Anlaufstrecke, durch Erhöhung des »Laminarwiderstandes« geltend.

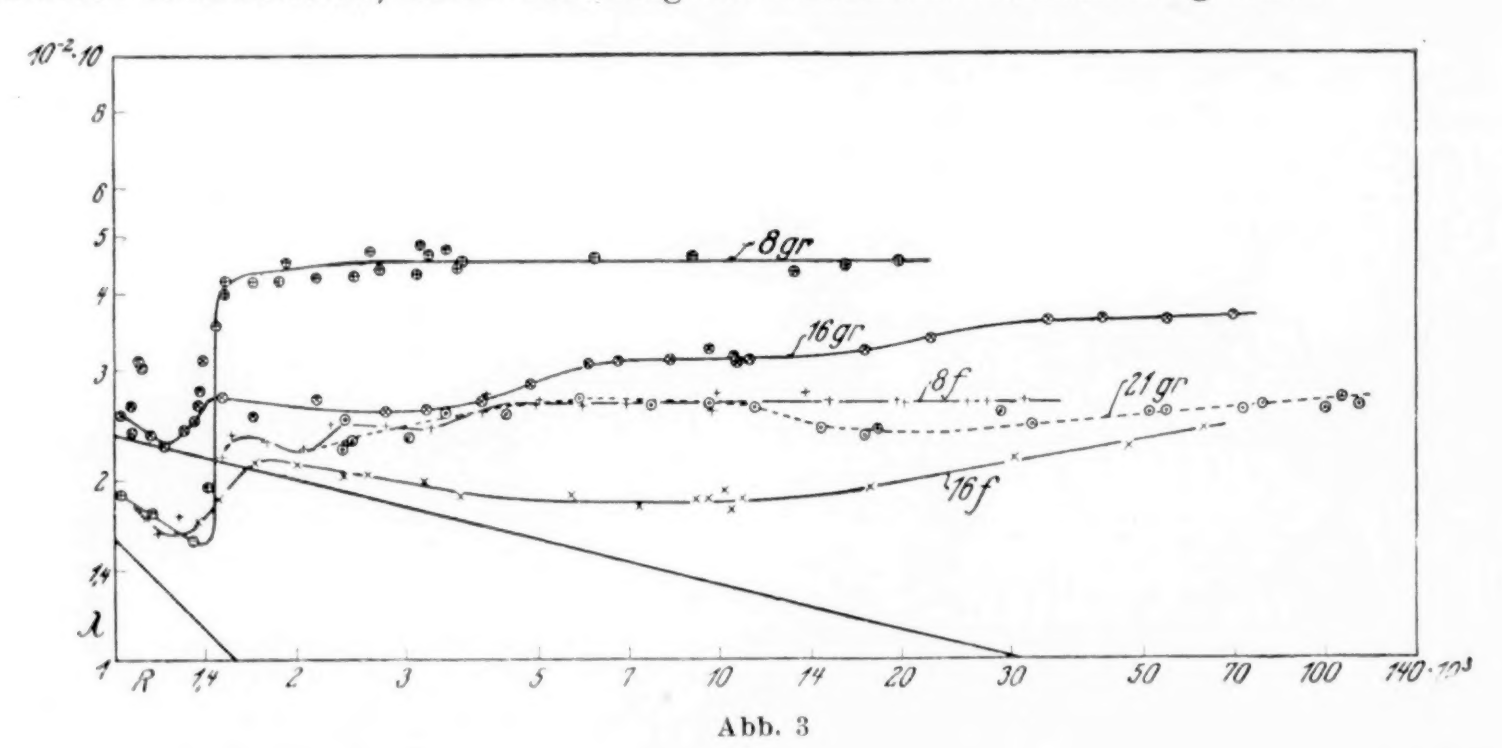


Abb. 3

Der Verlauf der λ-Kurven im turbulenten Bereich ist verhältnismäßig verwickelt. Nur für das enge Rohr gilt mit feinem und grobem Gewinde von $R = 5000$ bezw. 3000 an ein annähernd quadratisches Widerstandsgesetz. Alle anderen zeigen ein dauerndes Steigen des λ-Wertes mit größeren und kleineren Schwankungen. Zur Kontrolle wurde das Rohr 16f, bei dem das Ansteigen besonders auffällig ist, zerlegt und neu in anderer Weise zusammengesetzt, auch die Meßstellen geändert, neu gebohrt usw.; trotzdem erhielt sich der Kurvencharakter völlig aufrecht, so daß man auch in den anderen Fällen an die Realität wird glauben müssen. Daß die Kurven 16 gr und 8 f nicht zusammenfallen, was vom Standpunkt der Aehnlichkeit aus erwartet werden sollte, ist nicht allzu verwunderlich, da natürlich bei der Zartheit besonders des feinen Gewindes mit strenger Erfüllung der geometrischen Aehnlichkeit nicht zu rechnen ist und kleine Unterschiede im Hinblick auf die Erfahrungen an rauhen Widerstandskörpern schon beträchtlichen Einfluß haben können. Alles in allem scheinen die Versuchsergebnisse der oben ausgesprochenen Befürchtung Recht zu geben, daß man beim Zusammenfallen zweier λ-Werte für verschiedene Rohre nicht ohne weiteres auf ein weiteres

[1] Vergl. z. B. L. Schiller und H. Kirsten, Ueber den Widerstand strömender Flüssigkeit in kurzen Rohrstücken. Phys. Zeitschr. 22, S. 523, 1921. Aus der dortigen Abb. 2 geht hervor, daß bereits wenig oberhalb der kritischen Zahl der Gesamtwiderstand eines 1 m langen glatten Rohres von 8 mm l. W. (d. h. einschl. der Anlaufstrecke) sich innerhalb der Meßfehler nicht von dem Wert der Blasiusschen Widerstandsformel unterscheidet.

[2] Vergl. L. Schiller, Rauhigkeit und kritische Zahl. Zeitschr. f. Phys. 3, S. 414, 1920.

Zusammenfallen der λ-Kurve wird schließen dürfen; ein für die Aussichten auf einfache Gesetzmäßigkeiten nicht gerade erfreuliches Ergebnis. Immerhin dürfte das technische Interesse weitere ausgedehnte Untersuchnngen in dieser Hinsicht angezeigt erscheinen lassen.

Eine Prüfung des Prandtl-Kármánschen Gesetzes, wonach der Widerstand proportional der $^2/_7$ten Potenz der relativen Rauhigkeit ist, an Hand unseres Versuchsmaterials ist wegen dessen verwickelten Charakters nicht restlos möglich, da für eine solche nur quadratische Bereiche in Betracht kommen. Die beiden hier vorliegenden von 8 gr und 8 f stimmen jedoch nicht zu dem $^2/_7$-Gesetz. Wegen der schon oben erwähnten Unsicherheit der genauen Formgebung bei dem feineren Gewinde wird man hieraus keinen Schluß ziehen dürfen. Maßgebender sind die λ-Werte der drei Rohre mit dem groben, besser herzustellenden Gewinde. Nimmt man an, daß bei der größten relativen Rauhigkeit des Rohres 8 gr der dort vorhandene quadratische Bereich einer Strömungsform entspricht, der die beiden weniger rauhen Rohre 16 gr und 21 gr erst zustreben (womit die ansteigende Tendenz in Einklang steht), so müssen bei Erfüllung des $^2/_7$ Gesetzes die beiden λ-Werte jedenfalls noch unter der Grenze liegen, die man ausgehend von 8 gr nach dem $^2/_7$ Gesetz erhält. Die Rechnung liefert, wenn man für 8 gr $\lambda = 0{,}0452$ setzt, für 16 gr $\lambda = 0{,}0371$, im Einklang mit der Beobachtung, die von $R = 35\,000$ bis $70\,000$ noch ein schwaches Ansteigen von etwa 0,0358 bis 0,0364 aufweist. Für 21 gr erhält man $\lambda = 0{,}0343$ gegenüber einem Endwert der Beobachtungen von $\lambda = 0{,}027$ bei noch deutlicher Steigtendenz. Wenn sonach die Beobachtungen auch noch keine quantitative Bestätigung des Gesetzes ermöglichen, so weisen sie doch auf eine mögliche Uebereinstimmung bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen hin.

III. Das Widerstandsgesetz für Rohre von nicht kreisförmigem Querschnitt.

1. Stand der Theorie und Messungen. Was zunächst den Fall der Laminarströmung anlangt, so existieren für eine Reihe von Formen der Begrenzung theoretische Lösungen. Ein Vergleich zwischen Theorie und Versuch ist m. W. bisher nur für den Fall eines ringförmigen Spaltes von E. Becker[1]) durchgeführt worden und führte zu recht guter Bestätigung der theoretischen Lösung. Dann hat Boussinesq[2]) Lösungen angegeben für Rohre elliptischer und rechteckiger Begrenzung beliebigen Achsen- bezw. Seitenverhältnisses und für das gleichseitige Dreieck. Irgend eine experimentelle Prüfung für einen der erwähnten Fälle ist m. W. nicht veröffentlicht.

Der technisch wichtigere Fall der turbulenten Strömung nimmt in der Hydraulik einen breiten Raum ein bei der Untersuchung der stationären Bewegung im offenen Gerinn. Von dort stammt der Begriff des »hydraulischen oder Profil-Radius«, den wir auch auf den Fall des geschlossenen Rohres übertragen können. Er ist definiert als doppelter Querschnitt durch Umfang

$$a = \frac{2F}{U}.$$

Er tritt in den Widerstandsformeln der Hydraulik für die offenen Gerinne an Stelle des Rohrradius auf und hat sich dort wohl ebenso weit bewährt, wie die Widerstandsformeln im ganzen. Es liegt daher nahe, wie an manchen Stellen geschehen, auch für geschlossene Rohre von verschiedener Querschnittsform den gleichen Begriff in das Widerstandsgesetz einzuführen. Angaben über experimentelle Prüfungen für den Fall geschlossener Leitungen finden sich in der Literatur nur sehr wenige[3]) und augenscheinlich nur über solche mit rauher Wandung, die natürlich wenig durchsichtig sind. Was die Theorie des Profilradius anlangt, so hat v. Mises[4]) auf Grund der Annahme, daß für große Geschwindigkeiten bei allen Querschnittsformen die mittlere Schubspannung am Rande dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional und von Gestalt und Größe des Querschnitts unabhängig sei, abgeleitet, daß für große Werte von R mit konstantem λ der Profilradius im Widerstandsgesetz an die Stelle des Radius beim Kreisrohr tritt. Für kleinere R-Werte kann nach v. Mises von einer Anwendung der Hypo-

[1]) E. Becker, Strömungsvorgänge in ringförmigen Spalten und ihre Beziehungen zum Poiseuilleschen Gesetz. Mitt. üb. Forschungsarb. Heft 48, 1907. Die theoretische Lösung findet man in den Lehrbüchern der Hydrodynamik von W. Wien und H. Lamb.

[2]) J. Boussinesq, Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides. Journ. de math. pur et appl. (2) 13, S. 377, 1868.

[3]) Vergl. P. Forchheimer, Hydraulik. Leipzig 1914, S. 81.

[4]) v. Mises, Techn. Hydrodynamik I. Leipzig 1914, S. 92.

these des Profilradius keine Rede sein. Bestimmend für diese Einschränkung ist für v. Mises, daß aus der erwähnten Untersuchung Beckers für einen Ringspalt sich mit Einführung des hydraulischen Radius in die Definition von R eine kritische Zahl $R = 1350$ statt ∞ 1000 ergibt. Nach den neueren Feststellungen[1]) über die Veränderlichkeit des Uebergangspunktes von laminarer zu turbulenter Strömung wird man hierin allein wohl keinen zwingenden Grund mehr sehen müssen, die praktische Bedeutung des hydraulischen Radius auf hohe Rauhigkeiten bezw. bei glatten Rohren auf allerhöchste R-Werte (weit über 100000 hinaus) zu beschränken. Dazu kommt noch der Ausfall der im folgenden wiedergegebenen Versuche.

2. Eigene Messungen. Eine Untersuchung über die Frage nach der Zulässigkeit, den hydraulischen Radius statt des Kreisradius in das Widerstandsgesetz für Kreisrohre einzuführen, wird vorteilhafterweise mit glatten Rohren geführt werden, da für diese das nach Teil I weithin gültige Blasiussche Gesetz vorliegt und so der Entscheid eindeutig ausfällt gegenüber Versuchen mit rauhen Rohren. Untersucht wurden folgende Formen der Begrenzung: gleichseitiges Dreieck, Quadrat, Rechteck und Wellenlinie zu einem Kreis geschlossen (Abb. 4). Die Rohre hatten sämtlich eine Länge von 2 m, deren erste Hälfte als Anlaufstrecke und deren zweite als Meßstrecke benutzt wurde.



Abb. 4

Gleichseitiges Dreieck: Seitenlänge aus Wägung der Wasserfüllung 2,6753 cm; hieraus hydraulischer Radius $a = 0,7723$ cm. Hieran wurden Messungen im turbulenten Bereich von $R = 2000$ bis 114000 vorgenommen, die in Abb. 5 niedergelegt sind. Die eingezeichnete Gerade stellt, wie auch im folgenden, wieder das Blasiussche Gesetz dar, wobei sowohl in der Reynoldsschen Zahl wie in λ mit dem Profilradius gerechnet ist. Die Messungsergebnisse folgen dem Blasiusschen Gesetz recht gut, wenn sie — abgesehen von den höchsten Werten — auch ein wenig unterhalb verlaufen. Die Tendenz des Ansteigens bei den höchsten R ist vielleicht als Rauhigkeitseinfluß anzusehen, der bei allen von der Kreisform abweichenden Profilen sich schon bei niedrigerem R wird geltend machen müssen, da hier an den Seitenmitten eine stärkere Zusammendrückung der Grenzschicht erfolgt. Vielleicht spielt jedoch auch hier wieder Luftabscheidung eine Rolle.

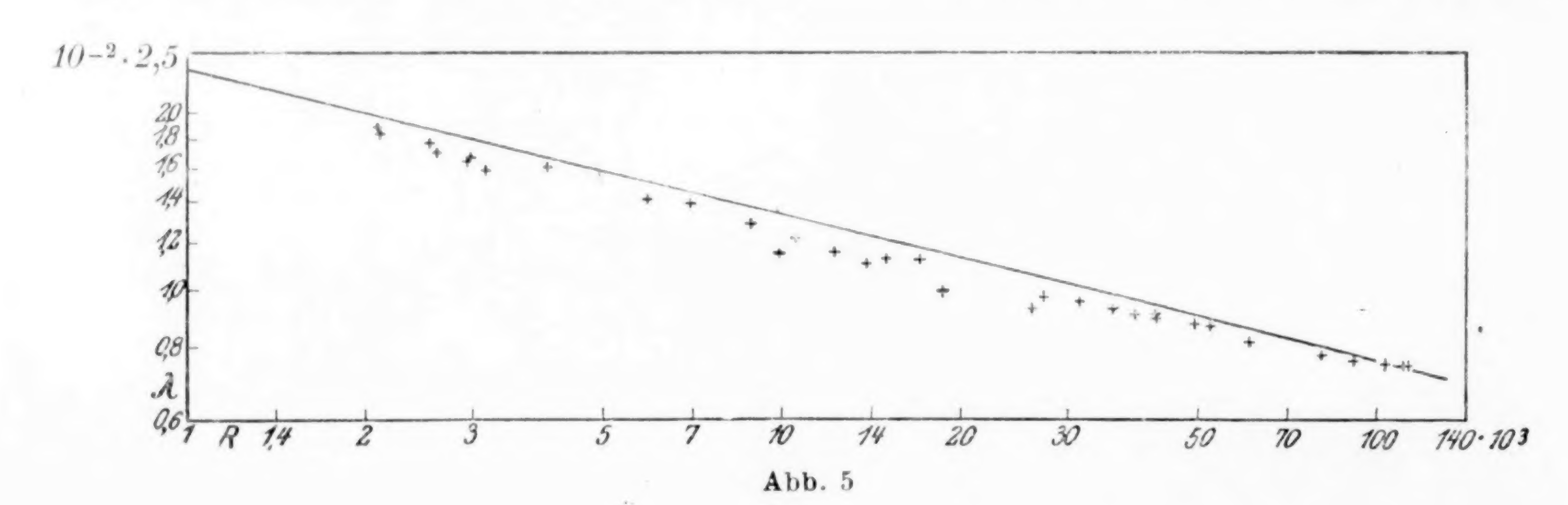


Abb. 5

Quadrat: Seitenlänge = 1,8003 cm; hydr. Radius $a = 0,9001$ cm. Ergebnisse der Messungen in Abb. 6. Meßbereich $R = 400$ bis 18000. Die oben erwähnte Boussinesqsche Lösung liefert für unsere λ-R-Darstellung[2]) als Widerstandsgesetz der Laminarströmung:

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{14,225}{R}.$$

[1]) L. Schiller, Diese Zeitschr. 1, S 436, 1921. Dort ergeben sich z. B. für Rohre mit nicht abgerundetem Einlaufstück kritische Zahlen von 1300 bis 1700.

[2]) Die Boussinesqsche Lösung, in unsere Bezeichnungsweisen umgeformt, lautet zunächst: $\Delta p = 28,45 \frac{\mu \bar{u} l}{b^2}$, wo b = Seitenlänge. Definieren wir jetzt eine neue Abmessung $a = \frac{b}{2}$ (entspr. dem hydraulischen Radius), so wird $\Delta p = 28,45 \frac{\mu \bar{u} l}{4 a^2}$. Definieren wir nun noch $\lambda = \Delta p \frac{a\, 2g}{\gamma\, l\, \bar{u}^2}$ und $R = \frac{\bar{u}\, a}{\nu}$, so geht die Boussinesqsche Lösung in die Form über: $\lambda = \frac{14,225}{R}$. Diese Gleichung enthält nun

Die dieser Gleichung in unserer logarithmischen Darstellung entsprechende Gerade findet sich neben der Blasiusschen in Abb. 6 eingetragen. Die Beobachtungswerte im laminaren Bereich liegen im Hinblick auf die wegen der kleinen Druckdifferenzen schwierigen Messungen befriedigend gut an der theoretischen Kurve. Die genaue Feststellung der kritischen Zahl ist durch die hierfür etwas kurze Anlauflänge erschwert. Immerhin erkennt man, daß sie etwa bei 1140 liegt. Die Beobachtungen im turbulenten Bereich liegen sehr gut an der Blasiusschen Geraden.

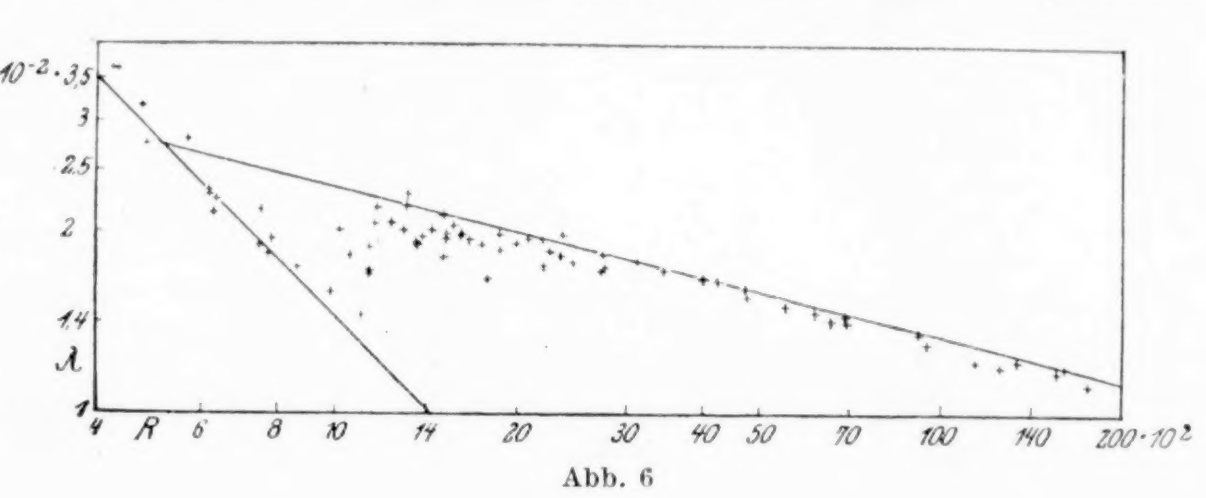


Abb. 6

Rechteck: Seitenverhältnis 7,9 : 27,8. Hydraul. Radius aus Wägung 0,6170 cm. Meßbereich $R = 300$ bis 30000. Die Boussinesqsche Lösung liefert[1])

$$\lambda_{\text{lam}} = \frac{17{,}732}{R}.$$

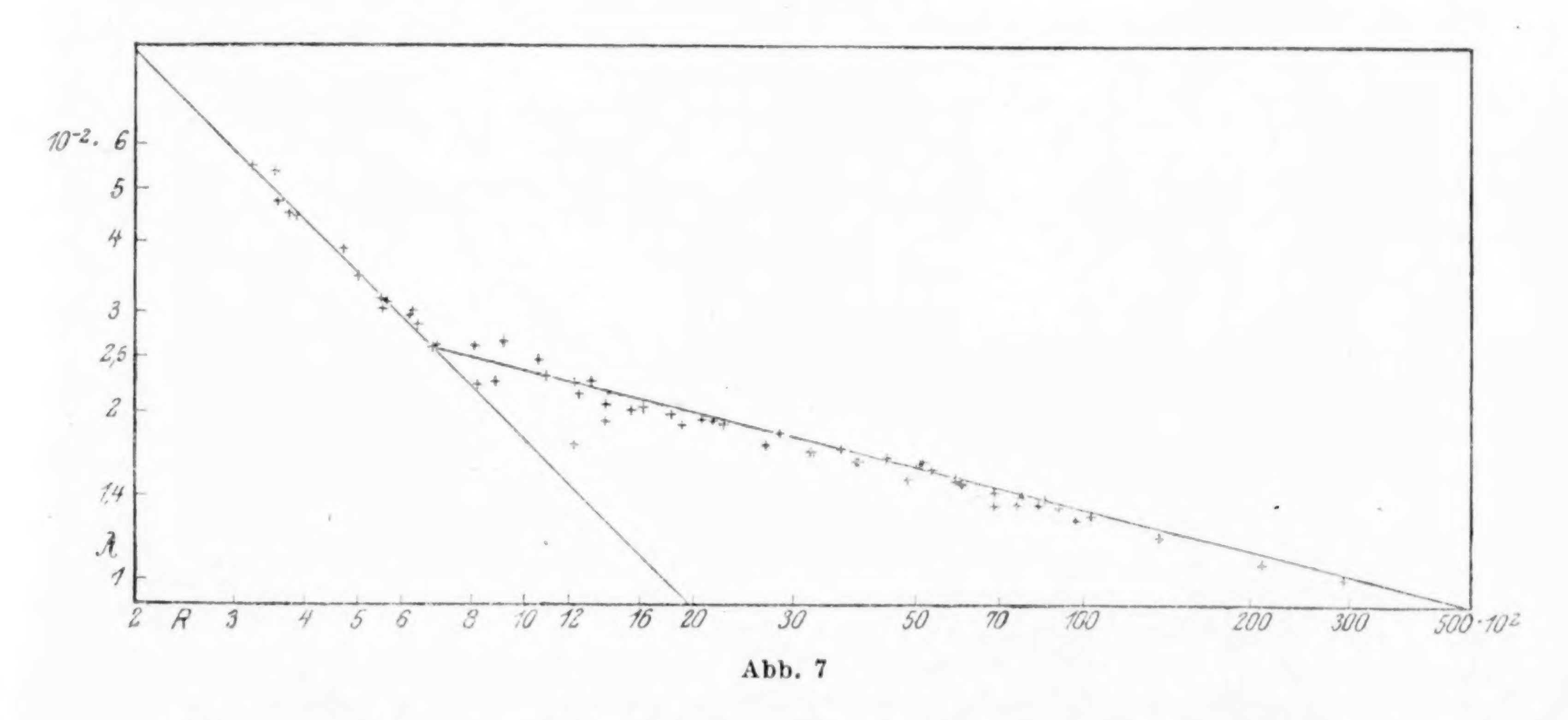


Abb. 7

Die Beobachtungen (Abb. 7) liegen im laminaren Gebiet vorzüglich an der Boussinesqschen Geraden, ebenso im turbulenten an der Blasiusschen.

Wellenrohr: Querschnitt $F = 3{,}2985$ cm²; hydraul. Radius $a = 0{,}7798$ cm. Selbst für diese Form liefern die Messungen (Abb. 8) noch eine erstaunlich gute Uebereinstimmung mit der Blasiusschen Geraden, wenn auch die λ-Werte für kleine R etwas darüber und bei höheren etwas darunter liegen. Auch für derartige Berandungen scheint das Blasiussche Gesetz bezw. der hydraulische Radius eine für praktische Anforderungen jedenfalls völlig ausreichende Näherung zu liefern.

zwar formal den hydraulischen Radius, ist jedoch die rein theoretische Lösung Boussinesqs, gilt ohne Annahme über eine Ersetzbarkeit des Kreisradius durch den hydraulischen Radius in dem für das Kreisrohr gültigen Gesetz. Diese Annahme würde einfach das Poiseuillesche Gesetz $\lambda = \frac{16}{R}$ ansetzen lassen.

[1]) Graphisch interpoliert aus den Boussinesqschen Angaben für Seitenverhältnisse 1 : 1, 2, 3, 4, 5, 10.

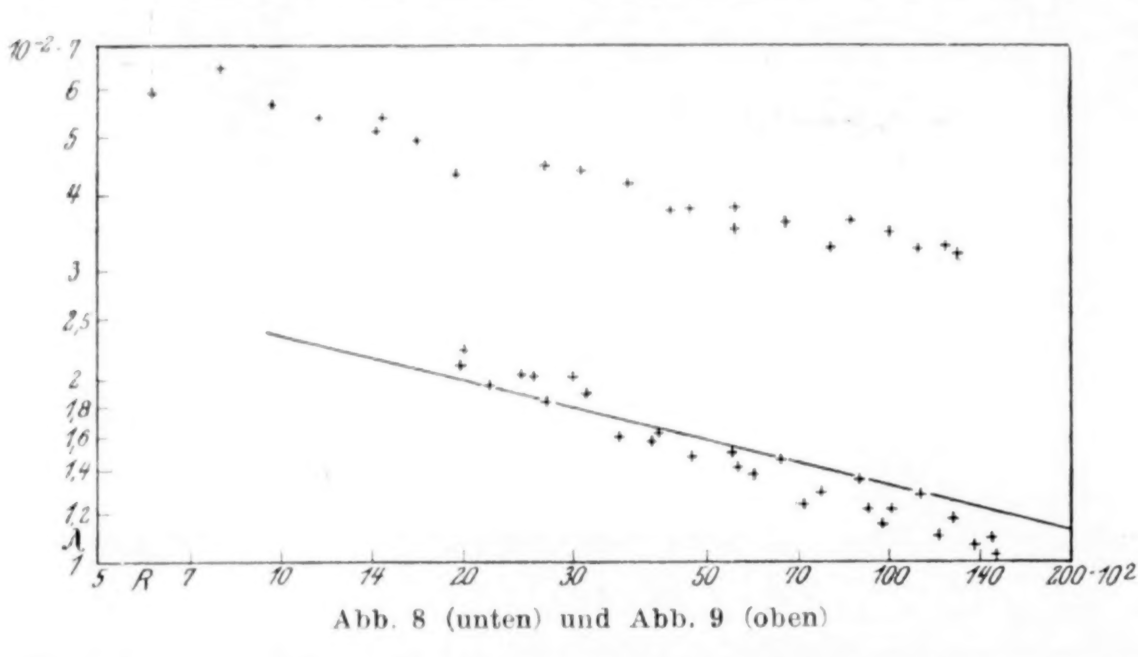


Abb. 8 (unten) und Abb. 9 (oben)

Zusammenfassend ist über diese Messungen zu sagen, daß man für die einfachen Formen der Berandung mit Einführung des hydraulischen Radius zu einer sehr guten Uebereinstimmung mit dem Blasiusschen Gesetz für Kreisrohre kommt. Da es sich hierbei um recht verschiedene, im langgestreckten Rechteck stark von der Kreisform abweichende Formen handelt, muß dies mehr als ein Spiel des Zufalls sein, und man wird nicht fehlgehen in der Annahme, daß hier ein theoretischer Zusammenhang aufzudecken sein muß.

Schließlich sei hier noch eine Widerstandskurve wiedergegeben, die an einem dreigängig gewundenen Schraubenrohr (Abb. 10) von großer Ganghöhe der Windungen (Ganghöhe = 4,44 cm, F = 3,5573 cm, hydraulischer Radius a = 1,0341 cm) gewonnen wurde [1]) (Abb. 9). Die Windungen wirken hier als Rauhigkeiten, außerdem wird infolge der starken Steigung eine Rotation der Flüssigkeit entstehen, beides zusammen muß sich in einer Erhöhung des λ-Wertes geltend machen. Die Neigung der λ-Kurve in Richtung der Blasiusschen Geraden scheint darauf hinzuweisen [2]), daß hier der Rauhigkeitseffekt gegenüber einer Vermehrung der Wandreibung durch die Rotation zurücktritt. Diese Steigerung der Wandreibung wird dadurch verursacht, daß immer die schnellsten Flüssigkeitsteile an die Wand geführt werden.

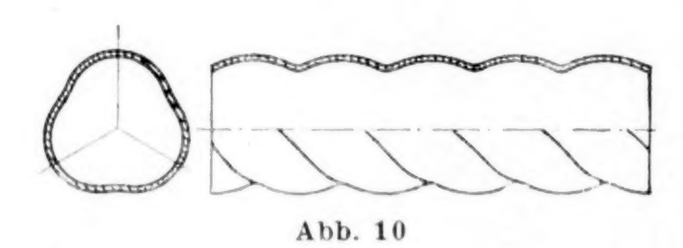


Abb. 10

3. Theoretische Bemerkungen. Wie oben erwähnt, hat Hr. v. Mises unter der Voraussetzung der Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes, d. h. für rauhe Wandung, als Widerstandsgesetz für Rohre beliebigen Querschnitts das aus der Hydraulik empirisch bekannte Widerstandsgesetz abgeleitet:

$$\Delta p = C \gamma \frac{l \bar{u}^2}{2g} \frac{U}{2F},$$

worin also für eine bestimmte Rauhigkeit C konstant und $\frac{2F}{U}$ der hydraulische Radius ist.

Andererseits hat Hr. v. Kármán [3]) eine Beziehung zwischen dem Widerstandsgesetz des glatten und des rauhen Rohres mit Kreisquerschnitt aufgestellt. Er denkt sich nämlich den Reibungswiderstand des glatten Rohres aufgebaut durch Superposition aus den bei rauhen Rohren beobachteten, mit der Geschwindigkeit quadratisch wachsenden Einzelwiderständen, wobei die einzelnen quadratischen Widerstände mit bestimmten (zunächst noch unbekannten) Gewichten in Rechnung zu setzen sind. Benutzen wir diesen Gedanken jetzt auch für Rohre von beliebigem Querschnitt, so erhalten wir unter Zugrundelegung der obigen Misesschen Gleichung als Widerstandsgesetz für das glatte Rohr beliebiger Querschnittsform:

$$\Delta p = \lambda \gamma \frac{l \bar{u}^2}{2g} \frac{U}{2F},$$

wo λ die Verteilungsfunktion, d. h. Anzahl und Größe der Einzelwirbel enthält. Daß wir jetzt im Fall des glatten Rohres nicht mehr mit einem quadratischen Gesetz zu rechnen haben, bedeutet aber, daß λ Funktion einer dimensionlosen Kombination der die Strömung bestimmenden Größen sein muß. Das sind aber μ, ϱ und $\bar{u}$, außerdem die

[1]) Derartige gewundene Rohre werden vielfach für Aufhängung von Beleuchtungskörpern verwendet.
[2]) Hr. Prof. Prandtl war so freundlich, mich hierauf aufmerksam zu machen.
[3]) Th. v. Kármán, a. a. O., S. 250.

geometrischen Bestimmungsstücke des Querschnitts. Von dem Standpunkt aus, daß λ die Verteilungsfunktion der Wirbel enthält, kommen hier in erster Linie in Betracht: die Fläche als maßgebend für die Größe der vorkommenden Wirbel und der Umfang als maßgebend für die Zahl der Wirbelerregungen. Nimmt man an, daß man gegenüber diesen beiden Bestimmungsstücken von der Form absehen kann [1]), so erhält man

$$\lambda = f(\mu, \varrho, \bar{u}, F, U)$$

und durch Dimensionenvergleichung:

$$\lambda = f\left(\frac{\bar{u}\, 2F}{\nu\, U}\right)$$

als eine vom Gesichtspunkt der Dimensionen aus mögliche Bestimmung für λ. Daß es sich hierbei nicht um das vollständige Gesetz handelt — wie ja auch durch experimentelle Abweichungen, insbesondere bei dem Wellenrohr, sich ergibt — folgt hier aus der Möglichkeit einer weiteren unabhängigen dimensionslosen Kombination unter den Bestimmungsstücken, nämlich etwa $\frac{U^2}{F}$. Nach den Versuchsergebnissen scheint der Einfluß dieses zweiten Parameters jedoch nicht allzu groß zu sein, jedenfalls kleiner, als man in anbetracht seiner nicht unbeträchtlichen Aenderung bei den benutzten Rohren annehmen möchte: Kreisrohr: 12,55, quadratisches Rohr: 16, gleichseitiges Dreieck: 20,8, Wellenrohr: 21,7, Rechteck (2 : 7): 23,2.

Nachtrag. Nach Abschluß der Niederschrift wurde mir durch Prof. Prandtl noch eine neuere einschlägige Arbeit von G. d. Marchi [2]) zugänglich gemacht. Die Arbeit enthält Messungen an glatten und rauhen (Gewinde-)Rohren bis $R = 5000$. Die Widerstände der glatten Rohre liegen nahe dem Blasiusschen Gesetz, die Widerstandskurven der rauhen Rohre zeigen ähnlichen Charakter wie die unsrigen. 192

Leipzig, 3. Juni 1922.

Über die Erzeugung gegebener ebener Kurven mit Hilfe des Gelenkviereckes.

Von **H. ALT** in Dresden.

Die Aufgabe, eine vorgelegte ebene Kurve mit Hilfe eines Gelenkmechanismus und insbesondere mit Hilfe des Gelenkviereckes möglichst genau wiederzugeben, ist wegen ihrer Bedeutung für die technischen Anwendungen nach verschiedenen Richtungen hin eingehend bearbeitet worden [3]). Ein besonderes Interesse hatte der Fall erweckt, daß die gegebene Kurve eine Gerade ist. Die sich hieraus ergebende Theorie der genauen und der angenäherten Geradführungen hat eine so eingehende Bearbeitung gefunden, daß man sie heute als erschöpfend behandelt ansehen darf. Der erste, der sich methodisch mit der allgemeinen Aufgabe befaßte, eine vorgelegte Kurve durch einen Gelenkmechanismus zu erzeugen, war Tschebyscheff [4]). Er ging analytisch vor und stellte sich die Aufgabe, in einer in eine Reihe entwickelten Funktion die Koeffizienten derart zu bestimmen, daß innerhalb eines gewissen Bereiches die größte Abweichung dieser Funktion von einer gegebenen Funktion möglichst klein bleibt. Auf diesem Wege behandelte Tschebyscheff die angenäherte Geradführung durch das Wattsche Parallelogramm sowie später auch durch das Gelenkviereck. Rein geometrische Hilfsmittel be-

[1]) Diese Annahme schließt anormale Formen der Berandung, wie z. B. enge, tiefe Einschnitte aus, da deren Flächeninhalt nichts zur Entwicklung größerer Wirbel beitragen kann und eine Beeinflussung der sich nahe gegenüberliegenden Wandstrecken anzunehmen ist.

[2]) G. d. Marchi, Nuove esperienze intorno al cambiamento di regime nel movimento dell' acqua entro condotti circolari. Rend. delle esper. e degli studi esegu. nell' Ist. Idrotecn. di Stra. Vol. I. Fasc. 3, 1917.

[3]) Bezüglich der vorhandenen Literatur vergl. Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. IV, Abschnitt 3, A. Schoenflies u. M. Grübler, Kinematik, S. 191 bis 192 und 223 bis 226. Ferner J. Neuberg, Systèmes de tiges articulées, Liège 1886, S. 5 bis 7.

[4]) P. L. Tschebyscheff, Mémoires des savants étrangères présentés à l'académie de St. Pétersbourg 1854, Bd. VII, S. 537.

nutzte Burmester[1]), der die angenäherte Geradführung durch das Gelenkviereck ausführlich behandelt hat. Er betrachtete mehrere (bis zu fünf) verschiedene Lagen einer Ebene, die er dann als Koppelebene eines Gelenkviereckes benutzte, und suchte diejenigen Punkte der Ebene zu ermitteln, deren sämtliche entsprechende Lagen sich auf einer Geraden befinden. In noch anderer Weise haben R. Müller[2]) und Allievi[3]) die angenäherten Geradführungen untersucht und zwar nach zwei Richtungen hin. Einmal gingen sie davon aus, daß unter den Koppelkurven eines Gelenkviereckes, die bekanntlich vom sechsten Grade sind, sich solche befinden, die eine sechspunktig berührende Tangente besitzen, und benutzten dann den entsprechenden Teil der betreffenden Koppelkurve als angenäherte Geradführung. Der andere Weg, der von R. Müller und Allievi beschritten wurde, besteht darin, daß sie Koppelkurven aufsuchten, die drei bezw. vier benachbarte Wendepunkte aufweisen. Hierbei erhält man, wie bereits von Tschebyscheff erkannt wurde, wesentlich bessere Annäherungen als bei Benutzung der sechspunktig berührenden Tangente.

Bei den genannten Arbeiten war das angestrebte Ziel immer die Konstruktion von Geradführungen, die weit eingehender untersucht worden sind, als ihrer Bedeutung für die praktischen Anwendungen entspricht. Auch Tschebyscheff hat auf seinem oben angedeuteten Wege, der an sich ganz allgemeiner Natur ist, nur die angenäherte Erzeugung von Geraden und nicht die von beliebig gegebenen Kurven behandelt. Die Frage der Erzeugung derartiger Kurven durch Gelenkmechanismen, die für die technischen Anwendungen wichtig ist, wurde bisher nur ganz flüchtig gestreift[4]) und nicht methodisch behandelt. Zwar fand schon Kempe[5]), der sich insbesondere mit den genauen Geradführungen beschäftigte[6]), daß es möglich ist, jede beliebige ebene algebraische Kurve durch einen Gelenkmechanismus zu erzeugen, doch blieb auch dieses an sich bedeutungsvolle Ergebnis so gut wie völlig unfruchtbar, da es den durch die praktischen Anwendungen gegebenen Fragestellungen nicht entsprechen konnte. Bei diesen handelt es sich vielmehr in erster Linie darum, mit möglichst einfachen Mechanismen eine vorgelegte Kurve zu erzeugen, wobei die vorgelegte und die erzeugte Kurve nicht vollkommen identisch zu sein brauchen, sondern wobei je nach den vorliegenden Bedingungen eine gewisse gute Annäherung genügt. Hieraus ergibt sich nun die folgende Aufgabe: Es ist ein Gelenkviereck derart zu ermitteln, daß bei seiner Bewegung ein Punkt seiner Koppelebene eine beliebig gegebene, mathematisch nicht definierte Kurve mit möglichst guter Annäherung erzeugt. In der vorliegenden Arbeit wird diese Aufgabe behandelt und es wird dabei angestrebt, die Ergebnisse zu Methoden zu verwerten, die eine unmittelbare Benutzung bei den praktischen Anwendungen ermöglichen.

Der erste Abschnitt bringt eine analytische Betrachtung, die darüber Aufschluß gibt, mit welchem Grade der Annäherung günstigstenfalls eine beliebige Kurve durch eine Koppelkurve ersetzt werden kann, eine Betrachtung, die aber für die Lösung der Aufgabe selbst ungeeignet ist. Die Aufgabe wird dann mit geometrischen Hilfsmitteln weiter behandelt, wobei Gedankengänge Burmesters[7]) den Ausgangspunkt bilden und Ergebnisse einer Arbeit von mir[8]) benutzt werden. Die entsprechenden theoretischen Erörterungen werden im zweiten Abschnitt ohne Beweise gegeben. Die geometrische Lösung der gestellten Aufgabe bildet den Inhalt des dritten Abschnittes. Dabei zeigt

---

[1]) L. Burmester, Geradführung durch das Kurbelgetriebe, Civilingenieur 1876, S. 597 bis 606, sowie 1877, S. 227 bis 250 u. S. 319 bis 342. — L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik 1888, S. 599 bis 663.

[2]) R. Müller, Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1892, S. 213 bis 217, 1893, S. 129 bis 147. — Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkviereckes, Festschrift der Techn. Hochschule Braunschweig 1897, S. 65 bis 75. — Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente, Zeitschrift f. Math. u. Phys. 1901, S. 330 bis 342. — Zur Theorie der doppelt gestreckten Koppelkurve, ebenda, 1903, S. 208 bis 219.

[3]) L. Allievi, Cinematica della biella piana, Napoli 1895, S. 133 bis 151.

[4]) A. Schoenflies u. M. Grübler, a. a. O., S. 223.

[5]) A. B. Kempe, On a general method of describing Plane Curves of the nth degree by Linkwork, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 7, S. 212 bis 216 (9. Juni 1876).

[6]) A. B. Kempe, How to draw a straigt line, Nature 1877, Bd. 16, S. 65 bis 67, S. 86 bis 89, S. 125 bis 127, S. 145 bis 146.

[7]) L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 599 bis 663.

[8]) H. Alt, Zur Synthese der ebenen Mechanismen, Zeitschrift f. angew. Math. u. Mechanik, 1921, S. 373 bis 398.

sich, daß die hier entwickelte Methode die nach der analytischen Betrachtung mögliche größte Annäherung nicht zu erzielen vermag. Dieser Umstand, der an sich für die Lösung der Aufgabe einen Nachteil darstellt, hat für die Anwendungen nur eine geringere Bedeutung, da in den praktischen Fällen außer der angenäherten Erzeugung einer gegebenen Kurve noch andere Forderungen, insbesondere konstruktiver Art, zu erfüllen sind. Wie man derartigen Forderungen gerecht werden kann, wird zum Schluß an einem Beispiel gezeigt.

1. Der analytische Ansatz. Es sei eine beliebige ebene Kurve k vorgelegt und es soll ein Gelenkviereck so ermittelt werden, daß eine seiner Koppelkurven in möglichst vielen Punkten mit der Kurve k übereinstimmt. Bezieht man die Kurve k auf ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem x, y (Abb. 1), so erkennt man, daß zur Bestimmung des gesuchten Gelenkviereckes neun Größen erforderlich sind und zwar folgende: die Koordinaten a_1, b_1 und a_2, b_2 der beiden Festpunkte M_1 und M_2, die beiden Kurbellängen r_1 und r_2, die Länge l der Koppelstange und die beiden Strecken l_1 und l_2, durch welche der die Kurve erzeugende Punkt A als Punkt der Koppelebene festgelegt wird.

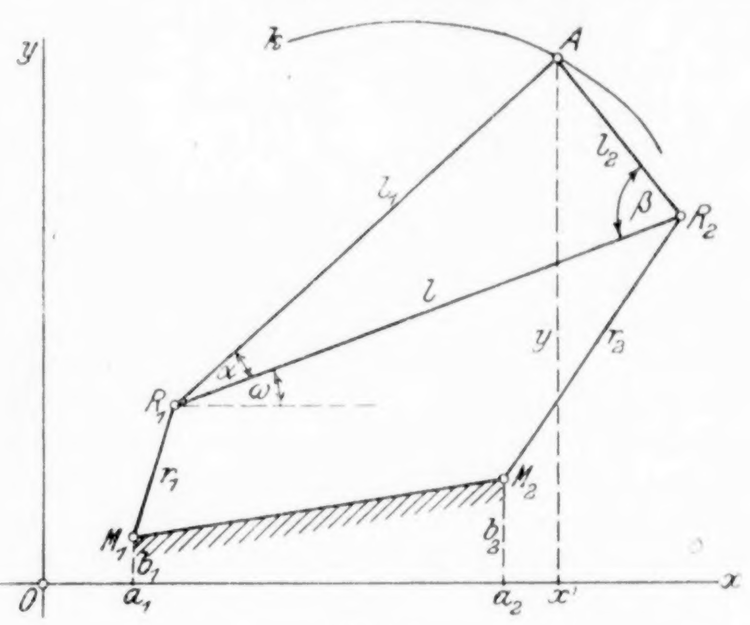


Abb. 1

Um die Gleichung der Koppelkurve zu erhalten, bezeichnen wir die Koordinaten des Koppelpunktes A mit x, y und benutzen den Winkel ω, den die Koppelstange mit der x-Richtung bildet, als Bewegungsparameter. Führt man dann die Abkürzungen

$$A_1 = -(x - a_1)\cos\alpha - (y - b_1)\sin\alpha, \qquad A_2 = (x - a_2)\cos\beta - (y - b_2)\sin\beta;$$
$$B_1 = (x - a_1)\sin\alpha - (y - b_1)\cos\alpha, \qquad B_2 = (x - a_2)\sin\beta + (y - b_2)\cos\beta;$$
$$C_1 = \frac{1}{2\,l_1}\left[(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + l_1^{\,2} - r_1^{\,2}\right] \qquad C_2 = \frac{1}{2\,l_2}\left[(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 + l_2^{\,2} - r_2^{\,2}\right]$$

ein, wobei die Winkel α und β der Koppelebene durch

$$\cos\alpha = \frac{1}{2\,l\,l_1}\,(l^2 + l_1^{\,2} - l_2^{\,2}), \qquad \cos\beta = \frac{1}{2\,l\,l_2}\,(l^2 - l_1^{\,2} + l_2^{\,2})$$

bestimmt sind, so läßt sich die Koppelkurve in der Parameterform schreiben

$$A_1\cos\omega + B_1\sin\omega + C_1 = 0, \qquad A_2\cos\omega + B_2\sin\omega + C_2 = 0.$$

Die Elimination des Bewegungsparameters ω liefert

$$(A_1\,C_2 - A_2\,C_1)^2 + (B_1\,C_2 - B_2\,C_1)^2 = (A_1\,B_2 - B_1\,A_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

als Gleichung der Koppelkurve, die bekanntlich vom sechsten Grade und trizirkular ist und drei Doppelpunkte besitzt.

Da man, wie oben gezeigt wurde, zur Bestimmung der Koppelkurve neun Größen braucht, so muß sich die Forderung erfüllen lassen, eine Koppelkurve zu ermitteln, die mit einer beliebig gegebenen Kurve k in neun willkürlich gewählten Punkten übereinstimmt. Bezeichnet man die als gegeben anzunehmenden Koordinaten der neun Punkte $A_1, \ldots A_9$ entsprechend mit x_1, $y_1 \ldots \ldots x_9$, y_9 und setzt sie der Reihe nach in die Gleichung (1) ein, so erhält man neun Gleichungen mit den neun unbekannten Bestimmungsgrößen des Gelenkviereckes. Die Auflösung dieses Gleichungssystemes ist jedoch wegen des hohen Grades, in dem die Unbekannten auftreten, nicht durchführbar.

2. Geometrische Grundlagen. Bei der geometrischen Behandlung der Aufgabe soll die folgende Fragestellung erörtert werden: Es seien mehrere endlich verschiedene Lagen P_1, P_2, ... einer komplan bewegten Ebene P gegeben und es sollen diejenigen Punkte B dieser Ebene ermittelt werden, deren sämtliche Lagen B_1, B_2, ... auf je einem Kreise um einen entsprechenden Mittelpunkt M_B liegen. Wenn es gelingt, zwei solcher Mittelpunkte M_B' und M_B'' und die ihnen entsprechenden Punkte B' und B'' der Ebene P zu finden, so ist dadurch ein Gelenkviereck mit den Festpunkten M_B' und M_B'' und den Koppelgelenkpunkten B' und B'' bestimmt, welches die Eigenschaft hat, daß seine Koppelebene $B'\,B''$ die gegebenen Lagen P_1, P_2, ... der Ebene P durchläuft.

Bei der Erörterung der angegebenen Fragestellung muß vor allem untersucht werden, wie viele Lagen der Ebene P beliebig gegeben werden dürfen, um die Aufgabe völlig zu bestimmen. Wir folgen hier den Ueberlegungen **Burmesters** und nehmen zunächst **drei** Lagen P_1, P_2, P_3 einer Ebene P als gegeben an. Dann kann man durch die entsprechenden Lagen A_1, A_2, A_3 jedes beliebigen Punktes A der Ebene P immer einen Kreis legen, dessen Mittelpunkt M_A bestimmt ist. Zu jedem Punkte A läßt sich stets eindeutig der zugeordnete Punkt M_A finden und umgekehrt zu jedem beliebigen Punkte M_A der zugeordnete Punkt A mit seinen drei Lagen A_1, A_2, A_3 [1]) Wenn wir also zwei Punkte M_A ganz beliebig wählen, so ist damit ein Gelenkviereck bestimmt, dessen Koppelebene der Reihe nach die drei Lagen P_1, P_2, P_3 einnimmt.

Betrachten wir **vier** Lagen P_1, P_2, P_3, P_4 einer Ebene P, so werden vier entsprechende (homologe) Punkte im allgemeinen nicht auf einem Kreise liegen. Es wird aber Punkte der Ebene P geben, durch deren vier entsprechende Lagen sich ein Kreis legen läßt. Diese Punkte bilden in jeder der vier gegebenen Lagen der Ebene P eine Kurve, die man nach **Burmester** die **Kreispunktkurve** nennt. Der geometrische Ort der entsprechenden Mittelpunkt heißt die **Mittelpunktkurve**. Beide Kurven sind vom dritten Grade und lassen sich nach **Burmester**[1]) durch ein Kreis- und ein Geradenbüschel punktweise konstruieren. Man kann nun auf der Mittelpunktkurve zwei beliebige Punkte M_B' und M_B'' herausgreifen und als Festpunkte eines Gelenkviereckes benutzen, dessen Koppelebene die vier gegebenen Lagen der Ebene P durchläuft.

Man erkennt nun schon, daß es möglich sein muß, noch eine fünfte Lage der Ebene P hinzuzunehmen und das entsprechende Gelenkviereck zu ermitteln. Wenn **fünf** Lagen $P_1, \ldots P_5$ der Ebene P gegeben sind, so zeichnet man zwei Mittelpunktkurven, etwa für die Lagen P_1, P_2, P_3, P_4 bezw. P_1, P_2, P_3, P_5, deren Schnittpunkte dann Mittelpunkte von Kreisen durch je **fünf** entsprechende Punkte sein müssen. Wie **Burmester**[2]) gezeigt hat, erhält man **vier** solcher Mittelpunkte, von denen entweder vier reell, zwei reell und zwei imaginär oder vier imaginär sind. Im ersten Falle ergeben sich entsprechend der Zahl der möglichen Kombinationen **sechs** verschiedene Gelenkvierecke, im zweiten Falle nur **ein** Gelenkviereck und im letzten Falle findet man, daß es kein Gelenkviereck gibt, dessen Koppelebene die fünf gegebenen Lagen der Ebene P durchläuft. Hieraus folgt, daß, wenn **ein** Mittelpunkt M_B' eines Kreises durch fünf entsprechende Punkte gefunden wurde, immer mindestens noch ein zweiter reeller Punkt M_B'' von der gleichen Eigenschaft existiert und infolgedessen auch wenigstens **ein** Gelenkviereck der geforderten Art vorhanden ist. Sind mehr als fünf Lagen einer Ebene P gegeben, so gibt es in dieser Ebene, wie man unmittelbar erkennt, im allgemeinen keine Punkte, deren sämtliche Lagen auf einem Kreise liegen.

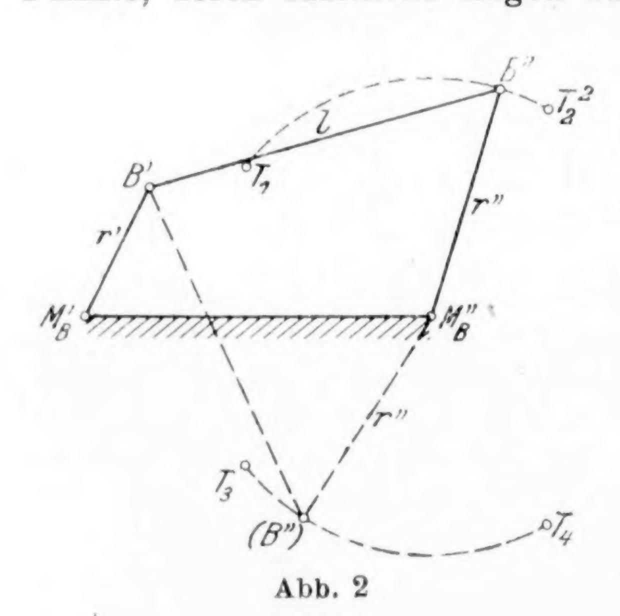


Abb. 2

In dem dargelegten Verfahren zur Ermittlung der gesuchten Gelenkvierecke sind ausschließlich geometrische Beziehungen benutzt worden, wobei jedoch im übrigen auf die Bewegungsbedingungen des Gelenkviereckes nicht eingegangen wurde. Es ist nun noch folgendes zu beachten. Wenn ein Gelenkviereck mit den Festpunkten M_B' und M_B'' und den entsprechenden Koppelgelenkpunkten B' und B'' ermittelt wurde, so kann der Fall eintreten, daß man bei den gefundenen Abmessungen der Glieder des Gelenkvierecks zwei verschiedene Bewegungsbereiche erhält, die zwischen je zwei Totpunkten T_1, T_2 bezw. T_3, T_4 liegen (Abb. 2). Wenn dann nicht sämtliche Lagen des Punktes B'', die den entsprechenden gegebenen Lagen der Ebene P angehören, in demselben durch zwei Totpunkte begrenzten Bewegungsbereiche gelegen sind, dann erfüllt das gefundene Gelenkviereck in Wirklichkeit nicht die gestellten Forderungen und ist daher unbrauchbar. Infolgedessen müssen in allen Fällen die ermittelten Gelenkvierecke daraufhin geprüft werden, ob die in Frage kommenden Lagen der Koppelebene sämtlich demselben Bewegungsbereiche angehören.

[1]) L. Burmester, Kinematik, S. 602 bis 607. — H. Alt, a. a. O., S. 374.
[2]) L. Burmester, Kinematik, S. 622.

Wir hatten gesehen, daß bei drei Lagen einer Ebene P zu jedem beliebigen Punkte B der Ebene P der Mittelpunkt M_B eines Kreises durch die drei entsprechenden Lagen des Punktes B eindeutig bestimmt ist. Man kann nun die für die Anwendungen wichtige Frage nach denjenigen Punkten M_B aufwerfen, die Mittelpunkte von Kreisen von dem gleichen vorgeschriebenen Radius sind. Der geometrische Ort dieser Mittelpunkte ist eine Kurve, die man die R_M-Kurve nennt. Es zeigt sich, daß die R_M-Kurve eine spezielle Koppelkurve ist, die leicht aufgezeichnet werden kann[1]. Der geometrische Ort der zugehörigen Punkte B_1 in der Ebene P_1, die R_1-Kurve heißt, ist ebenfalls eine Koppelkurve. Um bei vier Lagen einer Ebene P die Mittelpunkte von Kreisen von vorgeschriebenem Radius durch vier entsprechende Punkte zu finden, zeichnet man für die gegebenen vier Lagen die Mittelpunktkurve und für drei der vier Lagen die R_M-Kurve für den gegebenen Wert des Radius. Die Schnittpunkte beider Kurven sind dann die gesuchten Mittelpunkte.

3. Die Lösung der Aufgabe. Es sei ein Stück einer beliebigen Kurve k gegeben, das durch einen Punkt K der Koppelebene eines Gelenkviereckes mit möglichst guter Annäherung beschrieben werden soll. Um den Anschluß an die im vorigen Abschnitte dargelegten Gedanken zu gewinnen, wählen wir auf der Kurve k fünf beliebige Lagen $K_1, \ldots K_5$ des Punktes K und betrachten sie als entsprechende Punkte von fünf Lagen $P_1, \ldots P_5$ einer Ebene P, die wir dann als Koppelebene eines Gelenkviereckes benutzen. Um die fünf Lagen der Ebene P völlig zu bestimmen, muß in ihr noch ein zweiter Punkt L mit seinen entsprechenden Lagen $L_1, \ldots L_5$ gegeben sein. Ueber den Punkt L können wir daher noch frei verfügen.

Zunächst wollen wir den allgemeinsten Fall annehmen, daß wir die fünf Lagen $L_1, \ldots L_5$ des Punktes L ganz beliebig gewählt haben, wobei nur die Bedingung $K_1L_1 = K_2L_2 = K_3L_3 = K_4L_4 = K_5L_5$ erfüllt sein muß. Dann sind fünf Lagen einer Ebene P definiert, auf die wir nunmehr die im vorigen Abschnitt angegebenen Verfahren unmittelbar anwenden können. Es wird jedoch angestrebt werden müssen, die in der Wahl der Punkte $L_1, \ldots L_5$ enthaltene Willkür zu vermeiden, indem man diese Punkte so wählt, daß noch andere in der Aufgabe enthaltene Forderungen verwirklicht werden. Im folgenden sollen einige der Möglichkeiten, die Wahl der Punkte $L_1, \ldots L_5$ für die Lösung der Aufgabe nutzbar zu machen, erörtert werden.

Man kann versuchen, die Punkte $L_1, \ldots L_5$ so zu wählen, daß man eine größere als die fünfpunktige Uebereinstimmung zwischen der gegebenen Kurve k und der zu ermittelnden Koppelkurve k_k erhält. Diese Aufgabe, deren Lösung nach den Ergebnissen des ersten Abschnittes bis zu einer Uebereinstimmung in neun Punkten möglich sein muß, läßt sich mit den hier dargelegten Methoden nicht behandeln, da wir bei diesen, wie im zweiten Abschnitt gezeigt wurde, nicht über fünf Lagen einer Ebene hinausgehen können. Eine andere Aufgabe, die der eben genannten verwandt ist und die ebenfalls lösbar sein muß, ist die, neben der fünfpunktigen Uebereinstimmung noch die Uebereinstimmung der Tangenten in den fünf Punkten $K_1, \ldots K_5$ zu erzielen. Man würde hier so vorgehen, daß man in den Punkten $K_1, \ldots K_5$ an die Kurve k die Tangenten legt und auf diesen die Punkte $L_1, \ldots L_5$ als $K_1, \ldots K_5$ unendlich benachbart wählt. Es zeigt sich jedoch, daß man keine wirkliche Tangentenübereinstimmung erhält, da die hier benutzten Methoden nur auf geometrischen Lagenbeziehungen beruhen und die Bewegungsvorgänge selbst nicht berücksichtigt werden. Infolgedessen wird die vom Punkte L beschriebene Koppelkurve l_k wohl nur wenig von der Koppelkurve k_k des Punktes K abweichen, doch werden beide Kurven im allgemeinen nirgends eine Tangentenübereinstimmung, d. h. eine Uebereinstimmung in zwei benachbarten Punkten, aufweisen (Abb 3). In der angegebenen Weise gelangt man also jedenfalls nur zu einer näherungsweisen Tangentenübereinstimmung, wobei die Annäherung mitunter recht gut sein kann, ihre Güte sich jedoch im allgemeinen vorher nicht beurteilen läßt.

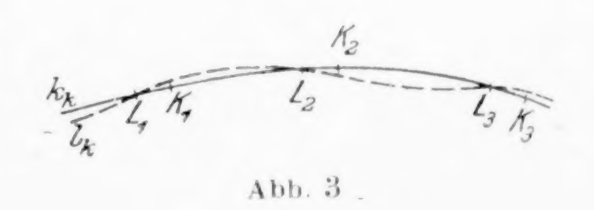


Abb. 3

In den Anwendungen kann auch der Fall eintreten, daß der Punkt L sich auf einer vorgeschriebenen Kurve l bewegen und ferner die Länge KL eine vorgeschriebene Größe a besitzen soll. Dann bestimmt man die Punkte $L_1, \ldots L_5$ als Schnittpunkte der

[1] H. Alt, a. a. O., S. 377 bis 379.

Kurve l mit den um $K_1, \ldots K_5$ mit a geschlagenen Kreisen und erhält damit wieder fünf Lagen einer Ebene, die man als Koppelebene eines Gelenkvierecks ansehen kann.

Es soll nun noch ein Beispiel dafür angegeben werden, in welcher Weise man noch andere Gesichtspunkte bei der Wahl des Punktes L berücksichtigen kann. Gegeben sei eine beliebige Kurve k, auf der fünf Punkte $K_1, \ldots K_5$ gewählt sind. Da wir, wie im ersten Abschnitt gefunden wurde, zur Bestimmung des Gelenkviereckes neun Größen brauchen, von denen wir durch die Wahl der Punkte $K_1, \ldots K_5$ erst über fünf verfügt haben, so können wir noch vier Größen annehmen. Nun sei der Drehpunkt M' einer Kurbel des Gelenkvierecks, und zwar der Antriebskurbel, aus konstruktiven Gründen gegeben. Ferner sei auch die Länge r' der Antriebskurbel vorgeschrieben. Dann bleibt von den vier verfügbaren Größen nur noch eine übrig. Diese wollen wir dadurch verwerten, daß wir fordern, die gegebene Kurve k soll von K_1 bis K_5 in einer Zeit durchlaufen werden, in der sich die Antriebskurbel um einen vorgeschriebenen Winkel α dreht. Wir legen hier am zweckmäßigsten den Punkt L in den Kurbelzapfen der Antriebskurbel, können aber auf dem Kurbelkreise die Punkte $L_1, \ldots L_5$ noch nicht angeben, da die Länge KL nicht bekannt ist. Die angegebene Wahl des Punktes L hat den Vorteil, daß wir damit schon einen Punkt der Ebene KL haben, dessen fünf Lagen auf einem Kreise liegen. Infolgedessen wissen wir von vornherein, daß mindestens noch ein Punkt von der gleichen Eigenschaft sich ergeben muß, daß man also auf jeden Fall eine Lösung der Aufgabe erhält. Wir haben nun zunächst die fünf Lagen $L_1, \ldots L_5$ des Punktes L zu ermitteln, durch die in Verbindung mit $K_1 \ldots K_5$ fünf Lagen einer Ebene bestimmt sind, so daß wir dann die im zweiten Abschnitt angegebene Methode zur Konstruktion des gesuchten Gelenkviereckes anwenden können. Wir schlagen um K_1 und um K_5 mit demselben beliebigen Radius l' Kreise, die den Antriebskurbelkreis in L_1' bezw. L_5' schneiden mögen (Abb. 4). Der durch L_1' und L_5' bestimmte Kurbelwinkel sei α'. Dann tragen wir in einem Punkte O einer Abszissenachse x (Abb. 4a) an diese die Winkel α, dessen freier Schenkel die Gerade g ist, und α'

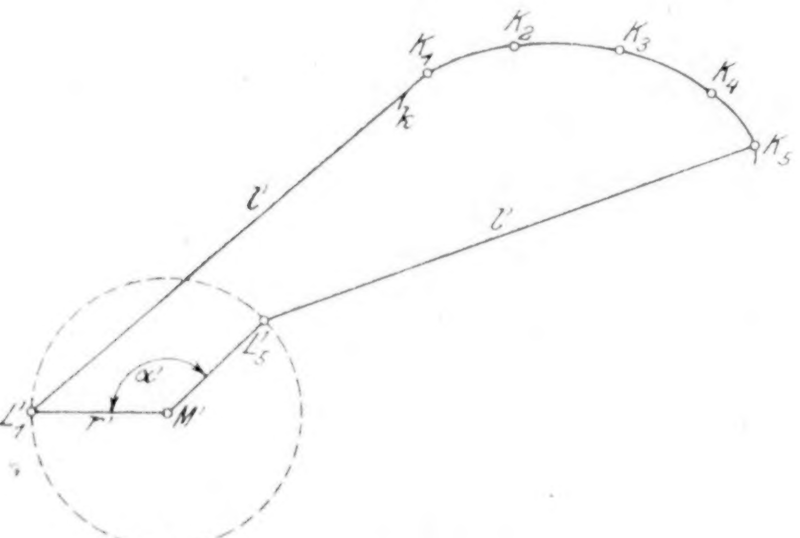


Abb. 4

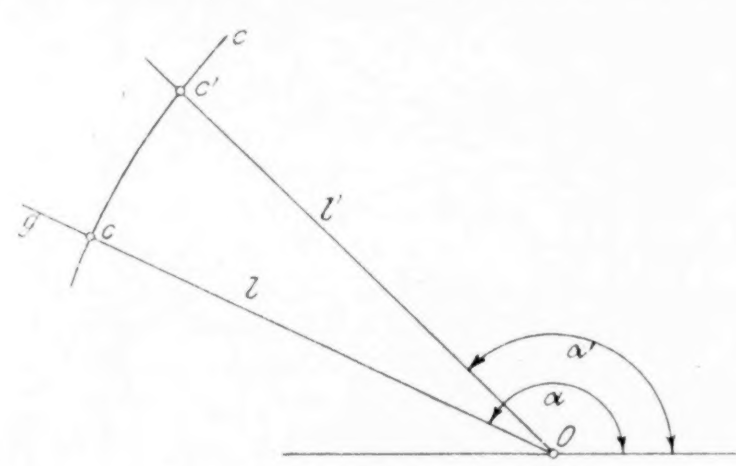


Abb. 4 a

an. Auf dem freien Schenkel von α' tragen wir die Strecke $OC' = l'$ auf. Wiederholen wir das Verfahren für verschiedene Werte von l', so finden wir entsprechende Punkte C', durch die wir eine Kurve c legen, welche die Gerade g in einem Punkte C schneidet. Die Strecke $OC = l$ ist dann die gesuchte Länge KL. Wenn wir also um $K_1, \ldots K_5$ mit dem Radius l Kreise schlagen, die den Antriebskurbelkreis in $L_1, \ldots L_5$ schneiden mögen, so haben wir wieder fünf Lagen einer Ebene bestimmt und damit die Aufgabe auf den im zweiten Abschnitt erörterten allgemeinen Fall zurückgeführt (Abb. 5).

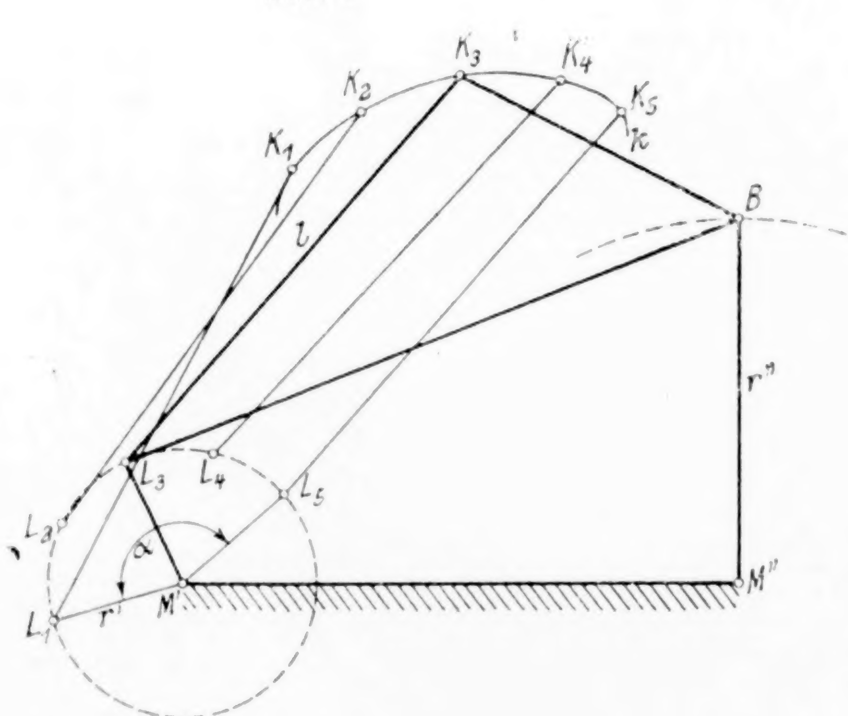


Abb. 5

Wenn ferner noch verlangt wird, daß auch die zweite Kurbel des Gelenkviereckes eine vorgeschriebene Länge r'' besitzen soll, so können nur noch vier Lagen der Punkte K und L zugrunde gelegt werden. Für die vier hierdurch bestimmten Lagen der Ebene KL zeichnet man die Mittelpunktkurve und für drei der vier Lagen die R_M Kurve zum Werte r''. Einen der Schnittpunkte beider Kurven wählt man dann als Drehpunkt der zweiten Kurbel des Gelenkvierecks, das dann völlig bestimmt ist. 188

Bodentragfähigkeit.

Von **JOACHIM SCHULTZE** in Berlin [1]).

Nachstehend werden theoretische Grundlagen für die Erklärung und rechnerische Erfassung der Bodentragfähigkeit gegeben; an die Ableituug der Grundformel schließt sich die Betrachtung einiger für die Praxis wichtiger Sonderfälle an; zur Nachprüfung werden dann Ergebnisse von Versuchen und Erfahrungen der Praxis danebengestellt.

1. Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Der Ableitung der Grundformel sei der einfachste Fall zugrunde gelegt, bei dem sich das von wagerechter Oberfläche begrenzte Erdreich in gleichmäßiger Zusammensetzung über den ganzen Kraftbereich der Gründung hin erstrecke; es sei ferner vorausgesetzt, daß der symmetrisch belastete Querschnitt des Grundbaues sich unverändert winkelrecht zur Bildebene weiter erstrecke; es sei endlich angenommen, daß es statthaft ist, die tatsächlich unter stetiger Krümmung verlaufenden Gleitflächen durch ebene, unter endlichen Winkeln zusammenstoßende Gleitflächen zu ersetzen; auch sei die Betrachtung zunächst auf den Fall der Flachgründung beschränkt.

Wird die Bodentragfähigkeit überschritten, so kann offenbar die Senkung des Grundbaues nur in der Weise erfolgen, daß sich zwei von den Außenkanten der Grundbau-Sohle ausgehende Gleitflächen bilden, die sich in der Symmetrie-Achse schneiden, um außerhalb der Grundbaukanten umzubiegen und in die Gleitflächenrichtung des widerstehenden Erddrucks überzugehen. Es entsteht auf diese Weise unter dem Grundbau ein Doppelprisma $ABCGD$ (Abb. 1), das bei Ueberschreitung der Bodentragfähigkeit sich in der Schneide ineinanderschiebt, so daß die von den Backen dieser Druckprismen umfaßten Gleitkeile BCD und ACG seitwärts gedrückt werden und ihrerseits das außerhalb befindliche, widerstehende Erdreich vor sich her schieben, die Entstehung der zur Erdoberfläche zugeordneten Gleitflächen verursachend. Die Kraft, die das widerstehende Erdreich $BCDF$ dem Herauspressen entgegensetzt, bedingt die Tragfähigkeit der Fläche AB.

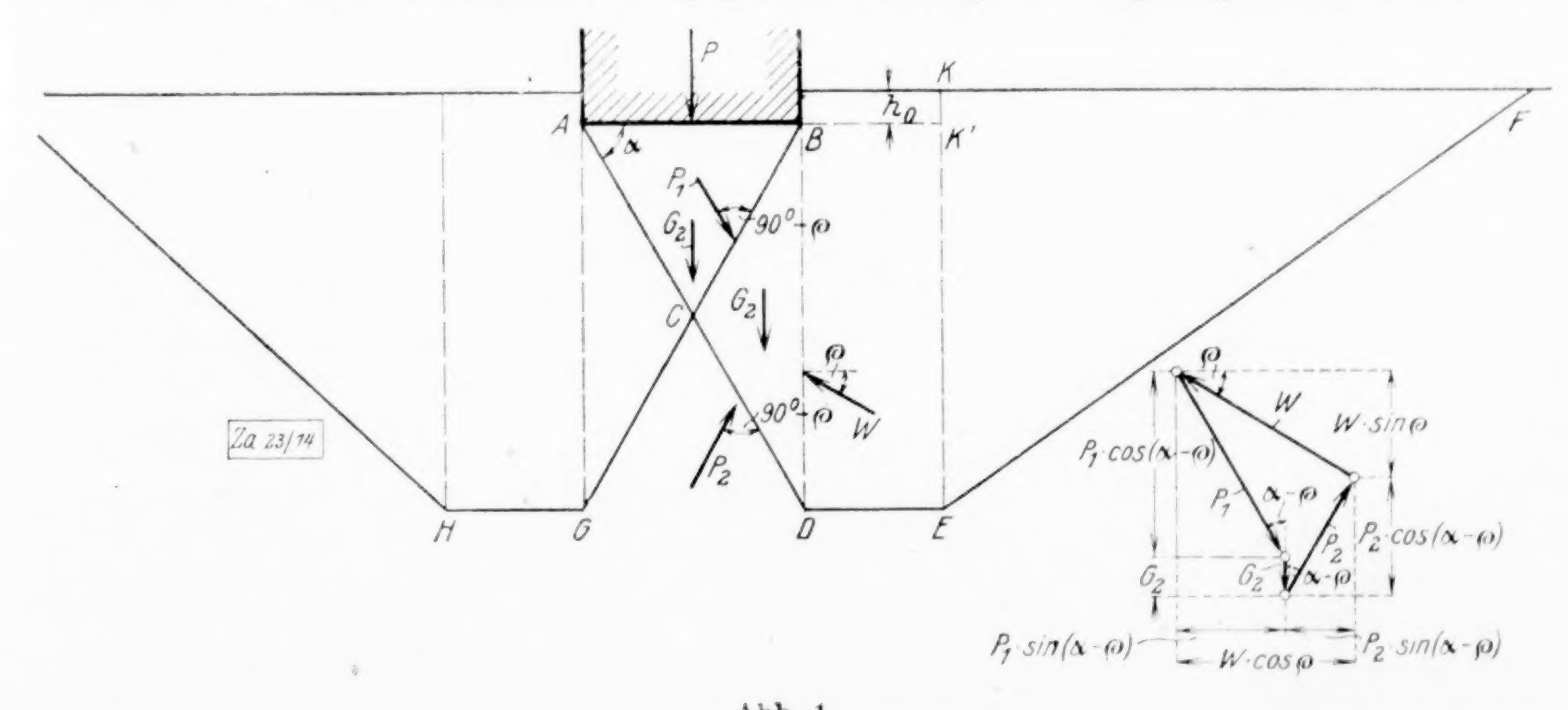


Abb. 1.
Kraftwirkung des Grundbaues.

[1]) Die Arbeit bildete den Hauptteil der von der Bauingenieur-Abteilung der Techn. Hochschule zu Berlin angenommenen Habilitationsschrift des Verfassers.

Im Schnitt seien als geradlinige Einzelstrecken der Gleitlinien unterschieden die Gleitlinien tätigen Erddrucks AD und BG unterhalb der Grundbausohle, die Gleitlinien widerstehenden Erddrucks EF und JH, und die mittleren Uebergangsstrecken DE und GH.

Die Neigung der Gleitflächen AD und BG ist nun offenbar durch die Bedingung bestimmt, daß zu ihr der Kleinstwert der Tragfähigkeit P gehört.

Beim Abwärtsdrücken des oberen Druckkeiles muß sowohl in ACD wie in BCG volle Reibung auftreten; ferner wird auch in Ebene BD und AG volle Reibung angesetzt werden müssen. Wird Winkel ABC mit α bezeichnet, so ergeben sich durch Kraftprojizierung zunächst in lotrechtem, sodann in wagerechtem Sinne folgende Gleichungen:

$$P_1 \cos(\alpha-\varrho) + G_2 = P_2 \cos(\alpha-\varrho) + W \sin\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$P_1 \sin(\alpha-\varrho) + P_2 \sin(\alpha-\varrho) = W \cos\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Es ist ferner

$$P_1 \cos(\alpha-\varrho) = \frac{P}{2} + \frac{b^2}{8} \operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und

$$G_2 = \frac{b^2}{4} \operatorname{tg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Aus diesen Grundgleichungen ergibt sich die erste Hauptgleichung

$$P = -\gamma \frac{b^2}{2} \operatorname{tg}\alpha + W[\sin\varrho + \cos\varrho \operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I).$$

W ist der in der Fuge BD wirkende widerstehende Erddruck; im allgemeinen wird er nach den in Geltung stehenden Verfahren ermittelt werden können; wenn im nachstehenden unter Beibehaltung des wesentlichen Kerns dieser Verfahren in Einzelheiten von ihnen abgewichen wird, so ist der Grund hierfür in der Unmöglichkeit zu sehen, sie auch für den Sonderfall steil geböschten Bodens beizubehalten.

Bei steiler als unter 30° ansteigendem Erdreich wird nämlich die Annahme einer ungebrochen verlaufenden Gleitlinie widerstehenden Erddrucks unmöglich, wie aus Abb. 2 hervorgeht.

Die Neigung der Gleitfläche muß einerseits steiler als die der Oberfläche sein, wenn sich ein Gleitkeil von endlicher Größe ergeben soll, andrerseits wird schon bei einem Böschungswinkel von 30° die Gleitflächenspannung in die Neigung der auf Wandfläche BD wirkenden Kraft fallen, was unmöglich ist mit Rücksicht auf die Bedingung, daß die Eigenlast G des Gleitkörpers durch die erwähnten beiden Kräfte im Gleichgewicht gehalten werden muß (s. Abb. 2).

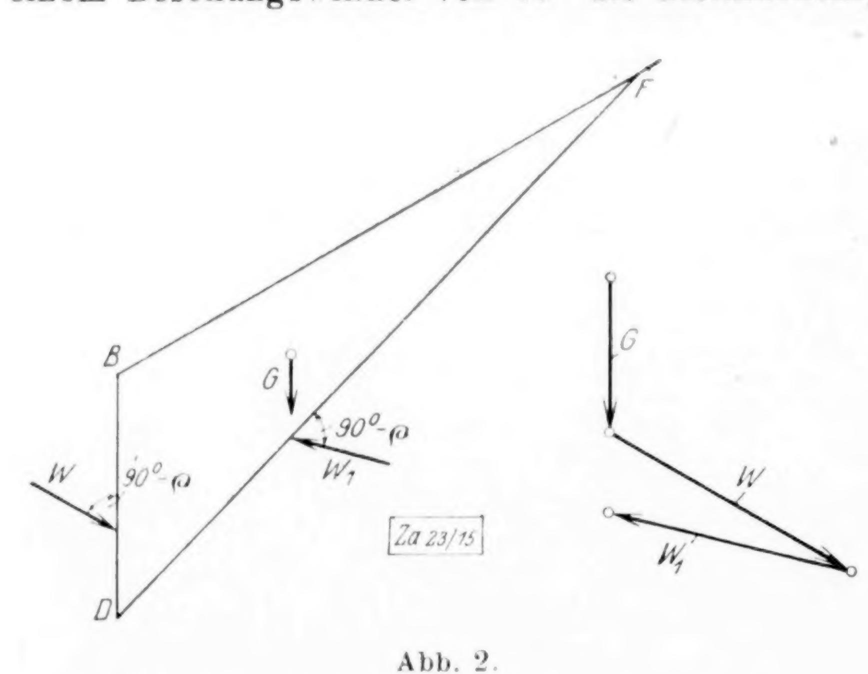


Abb. 2.
Gerade Gleitlinie bei steiler Böschung unmöglich.

Da die Ursache dieses inneren Widerspruches die Nichtberücksichtigung der Krümmung der Gleitfläche ist, so scheint es erforderlich, die Krümmung zum mindesten in der Weise zu berücksichtigen, daß die Gleitfläche aus zwei geraden Strecken zusammengesetzt gedacht wird, von denen die Sohlenstrecke wagerecht liegt, während die Hauptstrecke diejenige Neigung besitzt, die sich nach der Lehre vom Erddruck im unbegrenzten Erdreich ergeben würde. Oberhalb der Sohlenstrecke DE findet die Umbiegung der schräg gegen die lotrechte Fläche BD wirkenden Kraft W in die wagerechte Richtung statt.

Sowohl bei wagerechtem wie bei abfallendem Gelände ist der gegen die Fläche EK wirkende Erddruck von überwiegendem Einfluß auf die Größe von W, während der des Erdkörpers $BDEK$ weit zurücktritt; für letzteren seien bestimmte Annahmen gemacht, die für die bezeichneten Fälle als zutreffend mit großer Annäherung angesehen werden können, während sie für ansteigendes Erdreich um so mehr der Nachprüfung durch Versuche bedürfen, je steiler die Neigung der Oberfläche ist.

Aus den Darstellungen der Ufermauerrutschung in Gotenburg, der Erdrutschung am Culebra-Durchstich und aus ähnlichen Erdrutschungen, ferner aus den Versuchen

Kurdjümoffs darf geschlossen werden, daß die Gleitfläche in der Sohlenmulde eine ziemlich gleichmäßige Krümmung aufweist, daß ferner die Länge DE dieses Uebergangstückes um so kürzer ist, je größer der Wert ϱ ist; bei niedriger Ueberschüttung, wagerechtem Gelände und sehr geringem Wert von ϱ kann man die Länge DE etwa $= BD$ ansetzen, also $= b \tan \alpha$; zur Berücksichtigung der Verkürzung bei zunehmendem ϱ sei der Beiwert $\cos^4 \varrho$ zugefügt, so daß $DE = b \operatorname{tg} \alpha \cos^4 \varrho$ ist.

Es sei noch einmal betont, daß der wesentliche Kern der anerkannten Erddrucklehren hierbei in Geltung bleibt, da der Errechnung des wesentlichsten Bestandteils der Erdkraft W diese Lehren zugrunde gelegt sind.

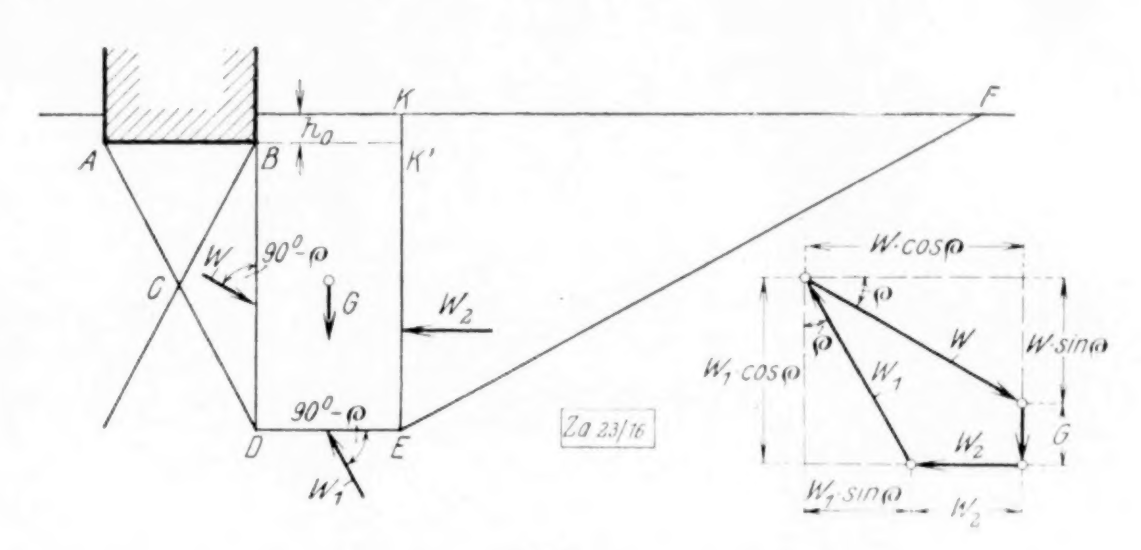


Abb. 3
Widerstehende Erdkraft.

Gemäß Abb. 3 wird, wenn wir die Kräfte zunächst auf die Wagerechte, sodann auf die Lotrechte projizieren:

$$W \cos \varrho = W_1 \sin \varrho + W_2 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$W \sin \varrho + b \operatorname{tg} \alpha \cos^4 \varrho \, (b \operatorname{tg} \alpha + h_0) \gamma = W_1 \cos \varrho \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

aus (1) und (2) wird

$$W (\cos^2 \varrho - \sin^2 \varrho) = W_2 \cos \varrho + b \operatorname{tg} \alpha \cos^4 \varrho \, (b \operatorname{tg} \alpha + h_0) \gamma \sin \varrho \quad \ldots \quad (3)$$

oder

$$W = \frac{W_2 + b \operatorname{tg} \alpha \, (b \operatorname{tg} \alpha + h_0) \gamma \cos^3 \varrho \sin \varrho}{\cos \varrho - \sin \varrho \operatorname{tg} \varrho} \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{II}).$$

Durch Verbindung von Gleichung (I) und (II) ergibt sich

$$P = -\frac{b^2}{2} \gamma \operatorname{tg} \alpha + [\sin \varrho + \cos \varrho \operatorname{ctg} (\alpha - \varrho)] \frac{W_2 + b \gamma \operatorname{tg} \alpha \, (b \operatorname{tg} \alpha + h_0) \cos^3 \varrho \sin \varrho}{\cos \varrho - \sin \varrho \operatorname{tg} \varrho} \quad (\mathrm{III}).$$

W_2 ist der widerstehende Erddruck, der gegen die Fläche $K'E$ wirkt; bei geringen Werten von h_0 kann man setzen

$$W_2 = (2 h_0 + b \operatorname{tg} \alpha) \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) \gamma.$$

Zur Abkürzung sei $\operatorname{tg}^2 \left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right) = \varepsilon$ gesetzt, dann erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{P}{\gamma} = -\frac{b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

$$+ b \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{\varepsilon}{2} (2 h_0 + b \operatorname{tg} \alpha) + \cos^3 \varrho \sin \varrho \, (h_0 + b \operatorname{tg} \alpha)\right] \frac{\sin \varrho + \cos \varrho \operatorname{ctg} (\alpha - \varrho)}{\cos \varrho - \sin \varrho \operatorname{tg} \varrho} \quad (\mathrm{IV}).$$

Für $\varrho = 0$ (Wasser) wird $\frac{P}{\gamma} = -\frac{b^2}{2} \operatorname{tg} \alpha + b \left(h_0 + \frac{b}{2} \operatorname{tg} \alpha\right) = b h_0$; es ist dies die bekannte hydrostatische Formel.

Für unsere Hauptformel (IV) läßt sich der den Kleinstwert von P — also die Tragfähigkeit — bedingende Wert von α durch Bildung der Gleichung $\frac{dP}{d\alpha} = 0$ finden. Theoretisch ist die Aufstellung dieser Gleichung ohne weiteres durchführbar, praktisch entstehen Schwierigkeiten durch den Umfang der Gleichung; es ist daher vorzuziehen, den Kleinstwert von P und den zugehörigen Winkel α durch Versuchsrechnung zu bestimmen. In nachstehender Zahlentafel sind diese Größen für einige Werte von b und h_0 zusammengestellt.

Zahlentafel 1.

Tragfähigkeit einer Schwelle von 20 cm Breite bei verschiedener Bodenart und Tiefe für $\gamma = 1$.

ϱ	h_0 cm	α	P in kg für je 1 cm	ϱ	h_0 cm	α	P in kg für je 1 cm
35°	0	48°	9,3	25°	0	38°	2,1
35°	16	51°	23,6	25°	16	45°	6.0
35°	32	53°	30,1	25°	32	46°	9,6
35°	48	53°	40,7	25°	48	47°	13,2
30°	0	43°	4,5	20°	0	33°	1,1
30°	16	48°	12,9	20°	16	39°	3,4
30°	32	50°	20,4	20°	32	40°	5,6
30°	48	51°	27,6	20°	48	40°	7,9

Ist für bestimmte Verhältnisse der Winkel α ermittelt und in Gleichung (IV) mit seinem Zahlenwert eingesetzt, so kann die Ableitung $\frac{dP}{db}$ gebildet werden; es stellt dieselbe die Pressungsflächen-Ordinate im Achspunkt dar; es ist:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{db} = \frac{p_1}{\gamma} = b \operatorname{tg}\alpha \left[-1 + \frac{\sin\varrho + \cos\varrho \operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)}{\cos\varrho - \sin\varrho \operatorname{tg}\varrho} \operatorname{tg}\alpha\,(\varepsilon + 2\cos^3\varrho \sin\varrho)\right]$$
$$+ h_0 \operatorname{tg}\alpha\,(\varepsilon + \cos^3\varrho\sin\varrho)\frac{\sin\varrho + \cos\varrho \operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)}{\cos\varrho - \sin\varrho \operatorname{tg}\varrho} \quad \text{(V)}.$$

Diese Gleichung hat die Form:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{b}{2}\eta + h_0\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VI)}.$$

Es geht hieraus hervor, daß — einen geradlinigen Verlauf der Gleitlinien unter der Sohle vorausgesetzt — die Pressungsfläche eine trapezförmige Gestalt hat mit der Randspannung $p_0 = h_0\zeta\gamma$; im Abstand x vom Rande ist ihre Ordinate

$$p_{(x)} = (h_0\zeta + x\eta)\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VII)},$$

wenn
$$\eta = 2\operatorname{tg}\alpha\left[-1 + \frac{\sin\varrho + \cos\varrho\operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)}{\cos\varrho - \sin\varrho\operatorname{tg}\varrho}(\varepsilon + 2\cos^3\varrho\sin\varrho)\operatorname{tg}\alpha\right]$$

und
$$\zeta = \operatorname{tg}\alpha\frac{\sin\varrho + \cos\varrho\operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)}{\cos\varrho - \sin\varrho\operatorname{tg}\varrho}(\varepsilon + \cos^3\varrho\sin\varrho).$$

Bei geringem ϱ, also wenig tragfähigem Boden, strebt η dem Wert 0 zu ganz unabhängig von der für α errechneten Größe: die Pressungsfläche nähert sich dem Rechteck, die Tragfähigkeit ist hier unabhängig von der Größe der Sohlenfläche. Mit zunehmendem ϱ wächst der Wert η und somit der günstige Einfluß der Größe der Sohlenfläche auf die Tragfähigkeit.

Für ein und dieselbe Bodenart tritt auch für größeres ϱ bei starker Ueberschüttungshöhe h_0 der Wert $\frac{b}{2}\eta$ hinter dem Wert $h_0\zeta$ zurück; hier tritt daher der günstige Einfluß der Vergrößerung der Sohlenfläche weniger hervor als in geringer Gründungstiefe.

Es drängt sich hier die Frage auf, wie sich die nach Gleichung (V) sich ergebende Spannungszunahme erklären läßt; wird nämlich unter der Grundsohle die Richtung der zu den wagerechten Ebenen zugeordneten Spannungen als lotrecht angenommen, so ist eine Spannungszunahme $\frac{dp}{dx}$ in der Querrichtung unmöglich; wird die Spannungsrichtung als schräg von einheitlicher Neigung angenommen, so läßt sich hiermit auch nicht angenähert die Spannungszunahme in der Querrichtung erklären, wie sie die Gleichung (V) ergibt. Es bleibt nur die Erklärung möglich, daß die Neigung der Spannungsrichtungen eine gewölbte Form hat, etwa gemäß Abb. 4.

Mit dieser Erklärung stimmt die Erscheinung überein, daß die nach Gleichung (IV) errechneten Werte α sämtlich kleiner als $45° + \frac{\varrho}{2}$ sind, daß sie aber mit zunehmender Gründungstiefe diesem Werte zustreben; in den Außenteilen der Sohlenfläche ist die Spannung und demgemäß auch die Neigung der Gleitfläche eine flachere als in den der

Achse näherliegenden Teilen; hierin liegt auch der Nachweis, daß die Gleitflächen unter der Grundsohle gekrümmt sein müssen, so daß die Gleichungen (I) bis (VI) als Näherungsformeln anzusehen sind, etwa in gleicher Weise, wie es bei den Formeln der Coulomb-, Rebhann-, Ponceletschen Lehre der Fall ist.

Der Winkel, unter dem sich die Gleitlinien schneiden, ist überall $90^0 - \varrho$, unter diesem Winkel müssen sich daher auch die beiden von den Sohlenkanten ausgehenden Gleitlinien unter der Sohlenmitte schneiden.

Abb. 4.
Gewölbte Spannungen.

In Abb. 4 stelle $LMNO$ einen Erdstreifen von der Breite dx dar, dessen Fußfläche in der Sohlenebene des Druck-Doppelkeiles liegt; die Spannung der Kopffläche sei unter dem Winkel ϑ gegen die Lotrechte geneigt; das Eigengewicht des Streifens sei vernachlässigt, die lotrechte Seitenkraft der Kopfspannung mit p bezeichnet und der mittelste Würfel des Streifens von der Höhe dh betrachtet, auf dessen linke Wandfläche eine Spannkraft wirkt von der Größe $p\,\varepsilon'\,d\,h$, wenn $\frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon' = \operatorname{tang}^2\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$; die Spannung der rechten Würfelwand ist um denjenigen Betrag größer, der als Anteil der wagerechten Reibungskraft $p \operatorname{tg} \vartheta\, d\,x$ der Kopf- bezw. der Fußfläche des Streifens auf die Höhe $d\,h$ entfällt; unter Annahme einer trapezförmigen Verteilung dieser Kraft über Fläche MO, wie sie auf S. 29 beschrieben und begründet ist, ist die auf die rechte Wand wirkende Kraft $p\,\varepsilon'\,d\,h + \frac{4\,p \operatorname{tang} \vartheta\, d\,x\, d\,h}{3\,b \operatorname{tang} \alpha}$; demnach ist die lotrechte Spannung des Nachbarstreifens nicht mehr $p\,d\,x$, sondern $p\,d\,x + \frac{4\,p \operatorname{tang} \vartheta\, d\,x\,\varepsilon}{3\,b \operatorname{tang} \alpha}$; es ist also

$$\frac{dp}{dx} = \frac{4\,p\,\varepsilon \operatorname{tang} \vartheta}{3\,b \operatorname{tang} \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(VIII)}.$$

Da nun nach Gleichung VII $\frac{dp}{dx} = \eta$ gegeben ist, so läßt sich $\operatorname{tang} \vartheta$ für jede Stelle ermitteln.

Bei geringer Gründungstiefe wird sich am Rand ein größerer Winkel ergeben, als der Reibungswinkel zwischen Mauerwerk und Erde; das ist selbstredend unmöglich; der Vorgang hier ist vielmehr so zu denken (s. Abb. 5), daß die beiden die Tragfähigkeit bestimmenden Hauptgleitflächen nicht von den Sohlenkanten ausgehen, sondern um eine bestimmte Strecke l von den Kanten einwärts, und daß außerhalb dieser neuen Ursprungspunkte die abgeschobenen Körper $LMNO$ liegen, in deren Kopf- und Fußflächen volle Reibung herrscht; ist die Höhe dieses Körpers h', dann ist in der Entfernung x vom Rande $\frac{d\,p}{d\,x} = \frac{4\,p \operatorname{tang} \varrho\,\varepsilon}{3\,h'}$, also

$$\ln(p) - \ln p_0 = \frac{4 \operatorname{tang} \varrho\, x\, \varepsilon}{3\,h'} \text{ oder } p = p_0\, e^{\frac{4\,x \operatorname{tang} \varrho\,\varepsilon}{3\,h'}} \quad \text{(IX)},$$

wenn p_0 die Randspannung ist, die sich nach Gleichung (VII) ergibt.

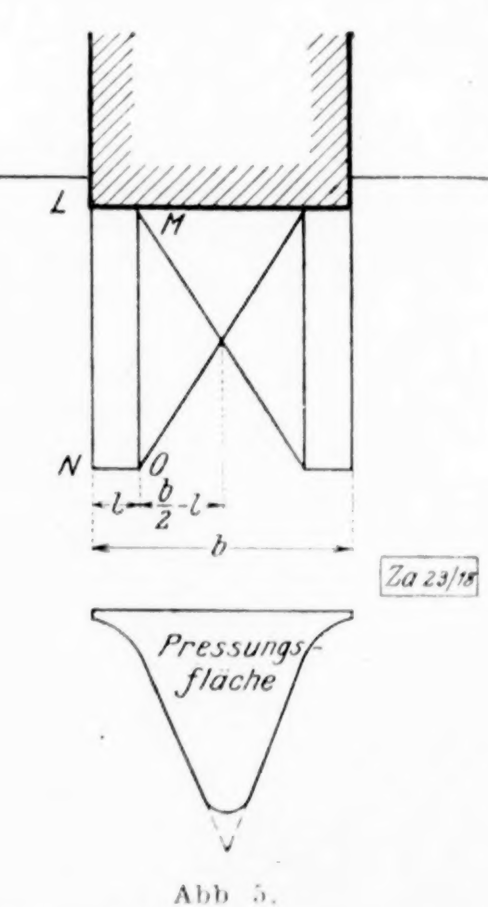


Abb. 5.
Theoretische Pressungsfläche bei geringer Bettungstiefe.

Die Pressungsfläche ist in diesen Außenstrecken also durch eine logarithmische Linie begrenzt. In der Mitte findet der Uebergang der rechtssteigenden Spannungslinie in die linkssteigende statt; hier muß daher $\frac{dp}{dx} = 0$ sein; also ist auch $\operatorname{tg} \vartheta = 0$; da ein sprungweises Anwachsen von $\operatorname{tg} \vartheta$ ausgeschlossen ist, so ist auch der Uebergang von

$\frac{dp}{dx} = 0$ in den endlichen Wert der geradlinigen Aeste der Spannungslinie ein allmählicher; wir erhalten dann grundsätzlich die in Abb. 5 dargestellte Form der Spannungslinie.

Die Ausrundungen der Winkel können im allgemeinen rechnerisch vernachlässigt werden, zumal in den bei Dauerbauten üblichen Gründungstiefen ihr Einfluß nur äußerst gering ist.

2. Sonderfälle. Hat das zur Gründung herangezogene Erdreich nur eine begrenzte Tiefe und ist es von einer starren Schicht bedeutend höherer Tragfähigkeit unterlagert, so ist zu prüfen, ob die aus Gleichung (IV) abzuleitende Höhe des Druck-Doppelkeiles auch geringer ist als die zwischen Grundbausohle und starrer Unterschicht verbleibende Höhe. Ist sie größer als letztere, so liegen hier ähnliche Verhältnisse vor, wie sie in Abb. 6 dargestellt sind; d. h. außerhalb des Druck-Doppelkeiles und der von ihm umfaßten Gleitkeile befinden sich die herausgeschobenen Erdkörper $LMNO$, die Verschlußpfropfen-artig wirken. Die Länge l dieser Verschlußstücke ergibt sich zu $l = \frac{b - h \operatorname{ctg} \alpha}{2}$; ist l im Vergleich zu $\frac{b}{2}$ gering, so kann α ohne wesentlichen Fehler nach Gleichung (IV) so errechnet werden, als wenn die starre Unterschicht nicht vorhanden wäre; nimmt dagegen l einen wesentlichen Teil von $\frac{b}{2}$ ein, so wird man $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ setzen können. Nach Festlegung von l ergibt sich für diesen letzteren Fall die Tragfähigkeit aus folgender Gleichung, deren erstes Glied sich durch Flächenintegration aus Gleichung (IX) ergibt, und deren zweites Glied den Inhalt des mittleren, geradlinig begrenzten Teiles der Spannungsfläche angibt:

$$P = \frac{3 h p_0}{2 \operatorname{tg} \varrho \varepsilon} \left(e^{\frac{4 l \operatorname{tg} \varrho \varepsilon}{3 h}} - 1 \right) + p_0 e^{\frac{4 l \operatorname{tg} \varrho \varepsilon}{3 h}} (b - 2 l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (X).$$

Die Gleichung erklärt die außerordentlich hohe Tragfähigkeit von Sandpolstern geringer Stärke, die zwischen zwei starre Flächen eingebettet sind, z. B. die große Tragfähigkeit von Sandschüttungen, wenn sie über festen Bodenschichten liegen und wenn ihre Höhe im Vergleich zur Grundbaufläche nicht allzu groß ist.

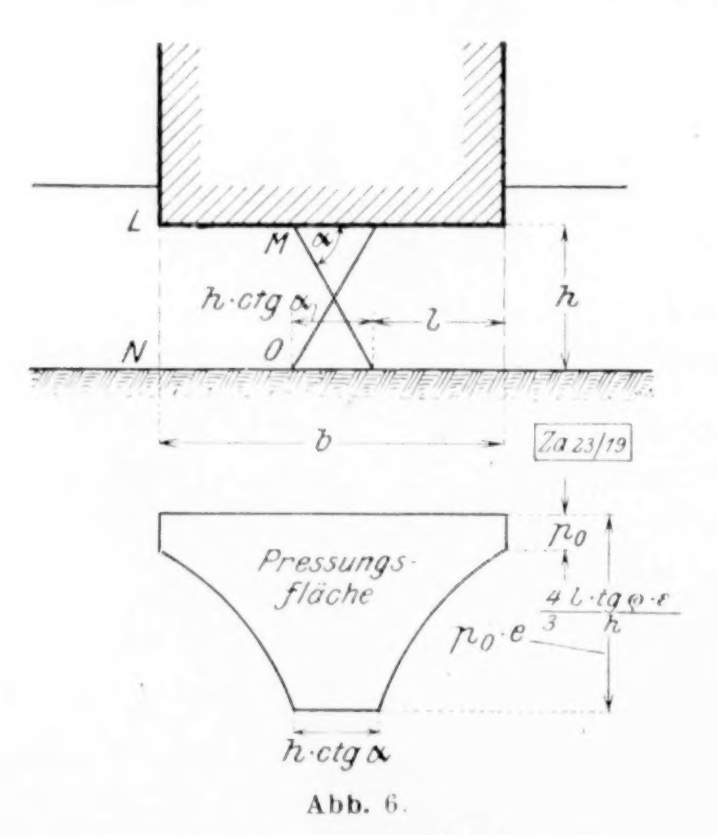


Abb. 6.
Pressung einer Sandschüttung von beschränkter Höhe.

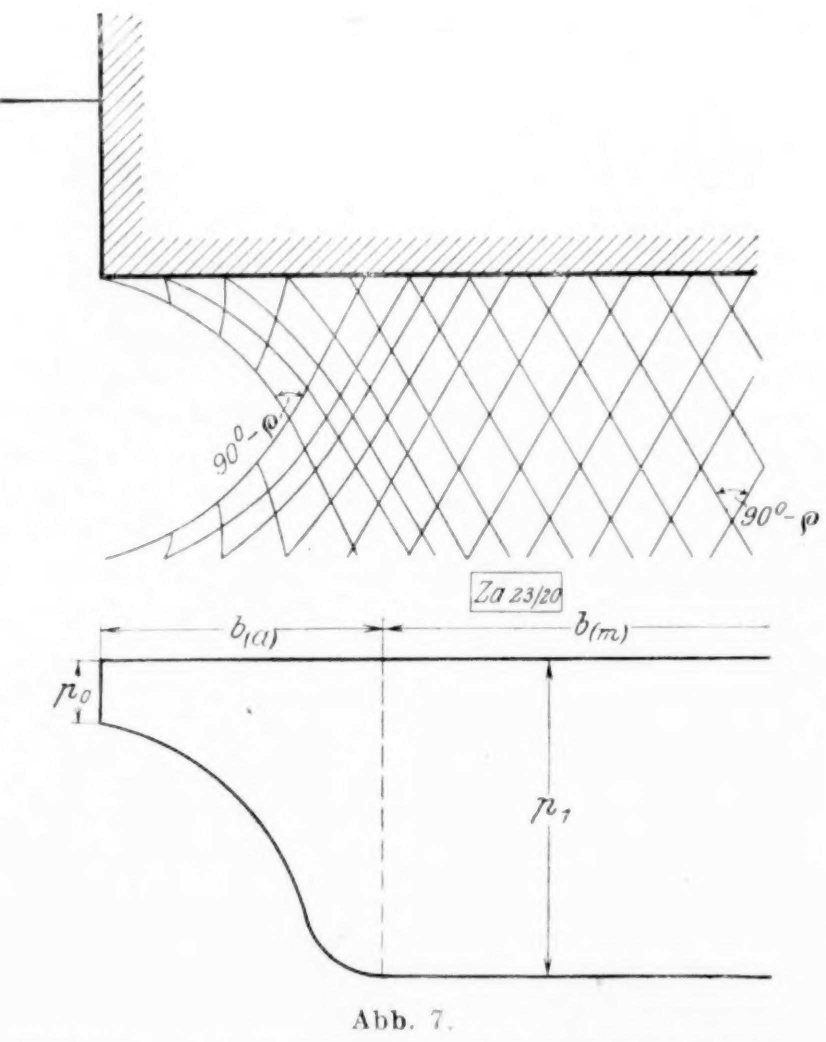


Abb. 7.
Gleitlinien und Pressungsfläche bei geringem Druck.

Es sei zum Fall des unbegrenzten Erdreichs zurückgekehrt und die Frage aufgeworfen, welche Form die Pressungsfläche annimmt, wenn die Tragfähigkeit nur zu

einem dem gewählten Sicherheitsgrad entsprechenden Teilbetrag ausgenutzt wird. Man wird sich hier die Sohlenbreite gemäß Abb. 7 in den mittleren Hauptteil $b_{(m)}$ und die beiden Außenstrecken $b_{(a)}$ geteilt denken müssen; unter ersterem ist das Erdreich von geradlinigen Gleitlinien durchsetzt, deren Richtung durch die Bedingung festgelegt ist, daß die Richtung der Größtspannung lotrecht, die des Kleinstdrucks wagerecht ist; die Pressungslinie muß daher in diesem Teile wagerecht verlaufen; denkt man sich den Mittelteil fort und die beiden Außenstrecken unmittelbar aneinandergelegt, so läßt sich die Gestaltung ihrer Pressungsfläche und der Verlauf der zugehörigen Gleitflächen so berechnen, als wenn ein Grundbau von der Breite $2\,b_{(a)}$ zur Berechnung stünde; es ergibt sich dann nebenstehendes Bild der Pressung und des Gleitlinienverlaufes.

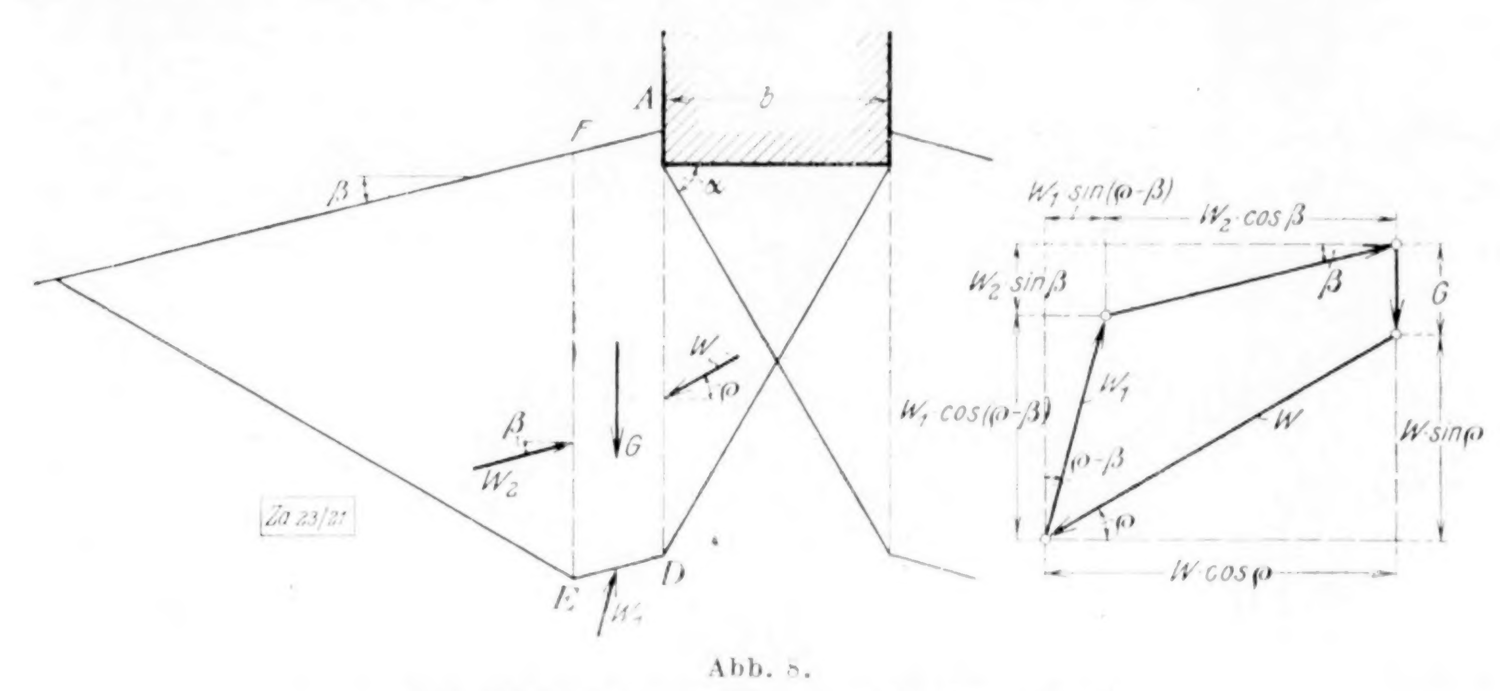


Abb. 8.
Kraftwirkung bei symmetrisch geneigtem Gelände.

Als nächster Fall sei der Fall symmetrisch in bezug auf die Sohlenachse abfallenden Geländes betrachtet (s. Abb. 8). Ist β der Neigungswinkel der Erdoberfläche, so muß am Schluß des Uebergangsstückes $ADEF$ die Erdkraft unter dem Winkel $90^0-\beta$ gegen die lotrechte Fläche EF gerichtet gedacht werden; die Breite des Uebergangsstückes, in welchem der auf die lotrechte Fläche wirkende Erddruck von der Neigung $90^0-\varrho$ in die Neigung $90^0-\beta$ übergeht, muß um so geringer werden, je mehr der Winkel β dem Wert ϱ zustrebt, denn für $\beta=\varrho$ ist die Breite $=0$. Hatten wir bei wagerechtem Gelände diese Breite $l=b\operatorname{tg}\alpha\cos^4\varrho$ gesetzt, so sei hier dieselbe mit $l=b\operatorname{tg}\alpha\,(\cos^4\varrho)\,\frac{\varrho-\beta}{\varrho}$ angesetzt.

Zerlegt man im Kräfteplan der Abb. 8 die Kräfte in ihre wagerechten und lotrechten Seitenkräfte, so ergibt sich für die lotrechten Seitenkräfte die Bedingung:

$$W\sin\varrho+G=W_2\sin\beta+W_1\cos(\varrho-\beta) \quad \text{(1)};$$

für die wagerechten Seitenkräfte lautet die Gleichung

$$W\cos\varrho=W_2\cos\beta+W_1\sin(\varrho-\beta) \quad \text{(2)}.$$

Durch Zusammensetzung beider Gleichungen ergibt sich

$$W=\frac{G\sin(\varrho-\beta)+W_2\cos\varrho}{\cos(2\,\varrho-\beta)} \quad \text{(3)}.$$

Nach Einsetzen der Einzelwerte ergibt sich

$$\frac{P}{\gamma}=-\frac{b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha+\frac{b\operatorname{tg}\alpha}{\cos(2\,\varrho-\beta)}\left[\frac{\varepsilon''}{2}(2\,h_0+b\operatorname{tg}\alpha)\cos\varrho\right.$$
$$\left.+(h_0+b\operatorname{tg}\alpha)\,\frac{\varrho-\beta}{\varrho}\cos^4\varrho\,\sin(\varrho-\beta)\right][\sin\varrho+\cos\varrho\operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)] \quad \text{(XI)}.$$

ε'' ist hier derjenige Wert, der bei geneigtem Gelände sinngemäß dem Wert ε bei wagerechtem Gelände entspricht [s. Gleichung (III)] Für $\beta=\varrho$ ist

$$\frac{P}{\gamma}=-\frac{b^2}{2}\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\alpha\left[(2\,h_0+b\operatorname{tg}\alpha)\frac{\cos\varrho}{2}\right][\sin\varrho+\cos\varrho\operatorname{ctg}(\alpha-\varrho)] \quad \text{(XII)}$$

Aus Gleichung (XI) ergibt sich, daß mit abfallendem Gelände die Tragfähigkeit in außerordentlich starkem Maße abnimmt. In Uebereinstimmung hiermit ist die Tatsache zu verzeichnen, daß die Tragfähigkeit hoher Dämme eine recht geringe ist.

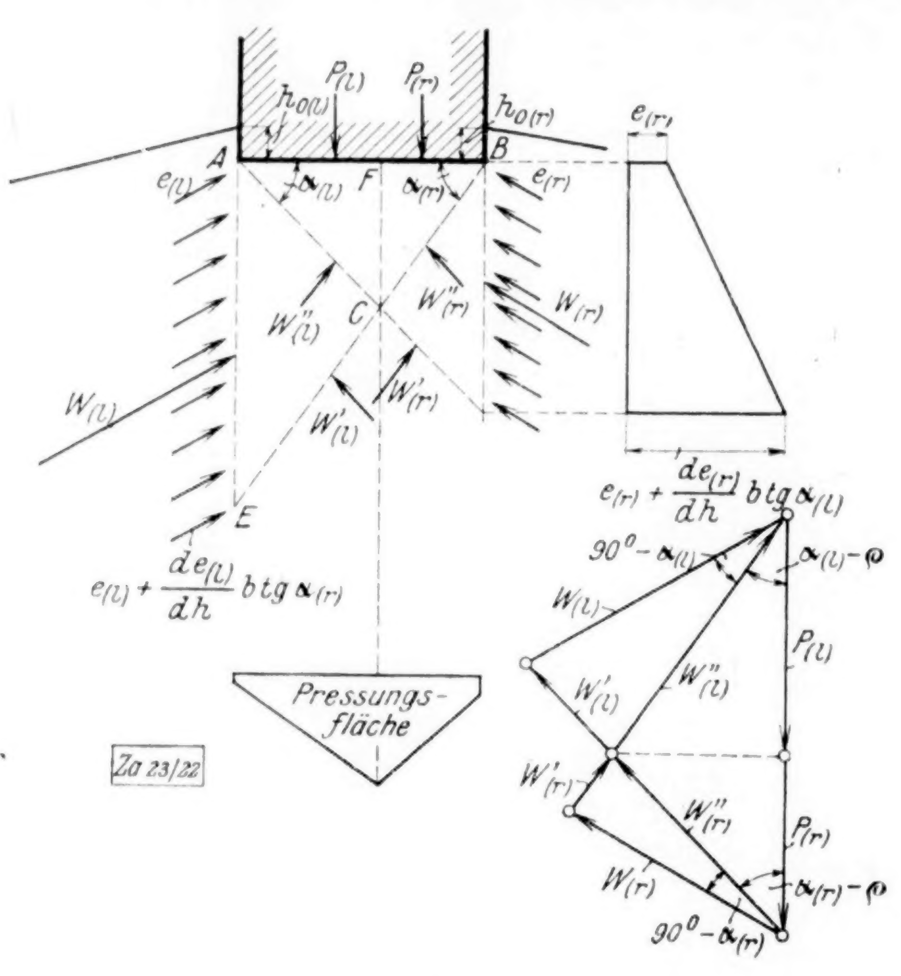


Abb. 9.
Kraftwirkung eines Grundbaues bei unsymmetrischer Böschung.

Für symmetrisch ansteigendes Gelände ist die Breite des Uebergangkörpers sinngemäß mit $l = b \operatorname{tg} \alpha \cos^4 \varrho \frac{\varrho + \beta}{\varrho}$ anzusetzen; seine Sohle kann jedoch nicht wie bei abfallendem Gelände der Oberfläche gleichlaufend gedacht werden, da bei steilerer Neigung die auf S. 20 erwähnten Unmöglichkeiten auftreten. Die Anpassung von Gleichung (XI) an den Fall ansteigenden Geländes bietet keine Schwierigkeit und sei daher hier fortgelassen.

Ist Symmetrie der Geländeneigung für die Sohlenachse nicht gegeben, so müssen auch die von den Sohlenkanten ausgehenden Gleitflächen, die als Hauptgleitflächen bezeichnet seien, und die Pressungsfläche unsymmetrisch verlaufen; der Spitzenpunkt der letzteren muß lotrecht unter dem Schnittpunkt der Hauptgleitflächen liegen. Unter Berücksichtigung der Bezeichnungen der Abb. 9 ergeben sich folgende Gleichungen zur Ermittlung der die Tragfähigkeit bedingenden Winkel:

$$\frac{P_{(r)}}{\cos(\alpha_l - \varrho)} = W_{(r)} \frac{\cos(2\varrho - \alpha_r)}{\sin(\alpha_l + \alpha_r - 2\varrho)} \quad \ldots \ldots \quad \text{(XIII)}.$$

$$P_{(l)} = \cos(\alpha_r - \varrho)\, W_{(l)} \frac{\cos(2\varrho - \alpha_l)}{\sin(\alpha_l + \alpha_r - 2\varrho)} \quad \ldots \ldots \quad \text{(XIV)}.$$

$$\frac{W_{(r)}}{\gamma} = (2 h_r^0 + b \operatorname{tg} \alpha_l)\, b \operatorname{tg} \alpha_l \frac{\varepsilon_{(r)}}{2} + (h_r^0 + b \operatorname{tg} \alpha_l)\, b \operatorname{tg} \alpha_l (\cos^4 \varrho) \frac{\sin(\varrho - \beta)}{\cos(2\varrho - \beta)} \frac{\varrho - \beta}{\varrho} \quad \text{(XV)}.$$

$$\frac{W_{(l)}}{\gamma} = (2 h_l^0 + b \operatorname{tg} \alpha_r)\, b \operatorname{tg} \alpha_r \frac{\varepsilon_{(l)}}{2} + (h_l^0 + b \operatorname{tg} \alpha_r)\, b \operatorname{tg} \alpha_r (\cos^4 \varrho) \frac{\sin(\varrho - \beta)}{\cos(2\varrho - \beta)} \frac{\varrho - \beta}{\varrho} \quad \text{(XVI)}.$$

Gleichung (XV) und (XVI) gelten für fallendes Gelände, für steigendes Gelände sind sie entsprechend zu ändern.

In diesen Gleichungen ist das Eigengewicht der Druck-Doppelkörper und der von ihnen eingeschlossenen Gleitkeile vernachlässigt, das nur bei ganz wäßrigen, flüssigen Bodenarten von gewissem Einfluß ist.

Die noch fehlenden Bedingungs-Gleichungen ergeben sich aus folgender Ueberlegung: die Spitzenordinate der Pressungsfläche muß den gleichen Wert ergeben, wenn sie aus dem linken Teil der Gleitkörperfigur errechnet wird, und wenn sie aus dem rechten Teil errechnet wird. Die widerstehende Erdspannung am Fußpunkt der Hauptgleitfläche setzt sich nach derselben Gleichung in eine auf die Sohlenfläche in Punkt F gerichtete Spannkraft um, wie die Erdkraft W in die Sohlen Druckkraft P; der Flächeneinheit der lotrechten Fläche AE entspricht ein Flächenteil der Sohle AB von der Größe $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_l + \operatorname{tg} \alpha_r}$, die aus dem linken Teil sich ergebende Spitzenordinate hat daher die Größe

$$p = \left(e_l + \frac{d\,e_l}{dh} b \operatorname{tg} \alpha_r\right) \cos(\alpha_r - \varrho) \cos(2\varrho - \alpha_l) \frac{\operatorname{tg} \alpha_l + \operatorname{tg} \alpha_r}{\sin(\alpha_l + \alpha_r - 2\varrho)}$$

und die aus dem rechten Teil sich ergebende Spitzenordinate ist

$$p = \left(e_r + \frac{d\,e_r}{dh} b \operatorname{tg} \alpha_l\right) \cos(\alpha_l - \varrho) \cos(2\varrho - \alpha_r) \frac{\operatorname{tg} \alpha_l + \operatorname{tg} \alpha_r}{\sin(\alpha_l + \alpha_r - 2\varrho)}.$$

Es ergibt sich daher

$$\left(e_r + \frac{d e_r}{d h} b \operatorname{tg} \alpha_l\right) \cos(\alpha_l - \varrho) \cos(2\varrho - \alpha_r)$$

$$= \left(e_l + \frac{d e_l}{d h} b \operatorname{tg} \alpha_r\right) \cos(\alpha_r - \varrho) \cos(2\varrho - \alpha_l) \qquad \text{(XVII)}.$$

$$\frac{d(P_r + P_l)}{d\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XVIII)}.$$

Aus den Gleichungen (XIII) bis (XVIII) lassen sich die vier Unbekannten $\alpha_l\, \alpha_r\, P_l\, P_r$ ermitteln; auch hier dürfte der einfachste Weg der der Versuchsrechnung sein, bei welcher zunächst verschiedene Werte für α_l angenommen werden, zu denen aus Gleichung (XVII) die jeweils zugehörigen Werte α_r ermittelt werden; aus je zwei zusammengehörigen Werten α_l und α_r ergibt sich die zugehörige Tragkraft der Sohle; der Kleinstwert dieser Sohlenkräfte bedeutet dann die Tragfähigkeit.

Schon bei geringer Unsymmetrie des Geländegefälles ergibt sich Winkel $\alpha_l = 0$; es bedeutet das, daß das Ausweichen des Bodens nur nach derjenigen Hauptgleitfläche erfolgt, die von der Sohlenkante der stärkeren Bodenüberschüttung ausgeht; offenbar sind hier zwei Fälle zu unterscheiden: der Fall des nur von lotrechten Kräften angegriffenen Grundbaues, der beim Nachgeben des Bodens der Seitenbewegung keinen Widerstand entgegensetzt, und der Fall des zwangläufig geführten Pfeilers, dem wohl eine lotrechte Setzung, aber keine seitliche Verschiebung möglich ist. Für ersteren Fall gelten die Gleichungen (XIII) bis (XVIII), die dadurch vereinfacht sind, daß $\alpha_l = 0$ ist.

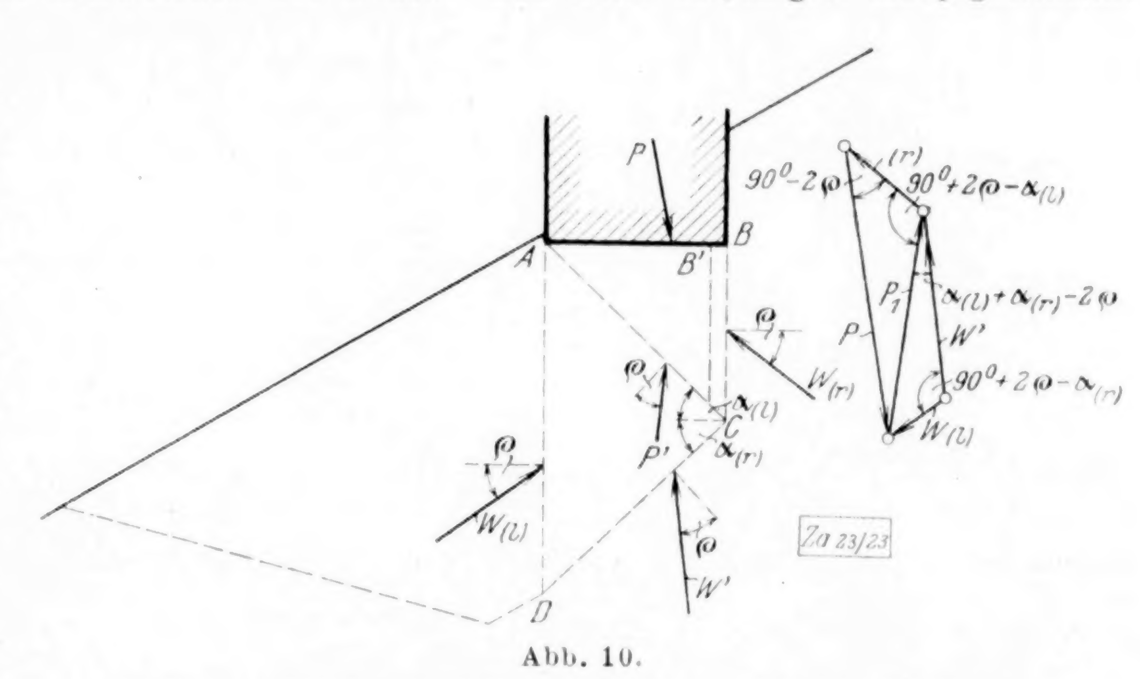


Abb. 10.
Seitlich geführter Grundbau auf unsymmetrischer Böschung.

Für den zweiten Fall sind die aus Abb. 10 abzuleitenden Beziehungen maßgebend; infolge der lotrechten Führung muß außer der lotrechten Rißfläche BC die Gleitfläche CD entstehen. Es ist demnach

$$P = P_1 \frac{\cos(2\varrho - \alpha_l)}{\cos 2\varrho} = W_{(l)} \frac{\cos(2\varrho - \alpha_l)\cos(2\varrho - \alpha_r)}{\cos 2\varrho \sin(\alpha_l + \alpha_r - 2\varrho)} \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{dP}{d\alpha_l} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2), \qquad \frac{dP}{d\alpha_r} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Da diese Gleichungen für α_l und α_r vollsymmetrisch gebaut sind, ist $\alpha_l = \alpha_r$, es ist demnach

$$P = W_{(l)} \frac{\cos^2(2\varrho - \alpha)}{\cos 2\varrho \sin(2\alpha - 2\varrho)} \quad \ldots\ldots \quad \text{(XIX)}. \qquad \frac{dP}{d\alpha} = 0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(XX)}.$$

W_l ist nach den zur Aufstellung von Gleichung (II) bis (VII) führenden Gesichtspunkten zu entwickeln.

Bei geringer Unsymmetrie ist der aus Abb. 10 zu entnehmende Wert W_r größer als der gegen Fläche BC wirkende widerstehende Erddruck; dann entsteht die Rißfläche BC nicht unter der Kante B, sondern eine Strecke b_1 einwärts; die Größe derselben ist dadurch bedingt, daß der auf BC wirkende Erddruck, auf Strecke BB' logarithmisch anschwellend, dem vom Druckkeil $AB'C'$ ausgeübten Seitendruck gleich sein muß.

Selbstverständlich führen die Gleichungen (XIII) bis (XX) ebenfalls alle Fehlerquellen in sich, die von der Annahme geradliniger Gleitflächen herrühren.

Eine wichtige Frage ist die der gegenseitigen Beeinflussung benachbarter Grundbauten, zu deren Lösung der zu Gleichung (III) bis (VII) führende Gedankengang die Möglichkeit bietet. Zwar kann die Lösung trotz Strebens nach möglichst voller rechnerischer Erfassung alles Wesentlichen nur in weiter Annäherung als zutreffend gelten, trotzdem sei sie entwickelt, da sie einen Einblick in das Wesen der Frage gestattet.

In Abb. 11 seien unter Zugrundelegung einer unendlichen Reihe gleichartiger, benachbarter Grundbauten drei der Grundbauten dargestellt; die Entfernung, in der eine gegenseitige Beeinflussung einsetzt, ergibt sich aus den Ausführungen von Gleichung I—IV Ist diese Grenzentfernung unterschritten, endet jedoch die vom Fuß des Doppel-Druckkeiles ausgehende Gleitfläche in der Nachbar-Grundbauleibung nahe der Oberfläche, so ist die gegenseitige Beeinflussung so gering, daß sie vernachlässigt werden kann; schneidet sie aber diese Leibung im wesentlichen Maße an, so ist mit einer wesentlichen Beeinflussung zu rechnen.

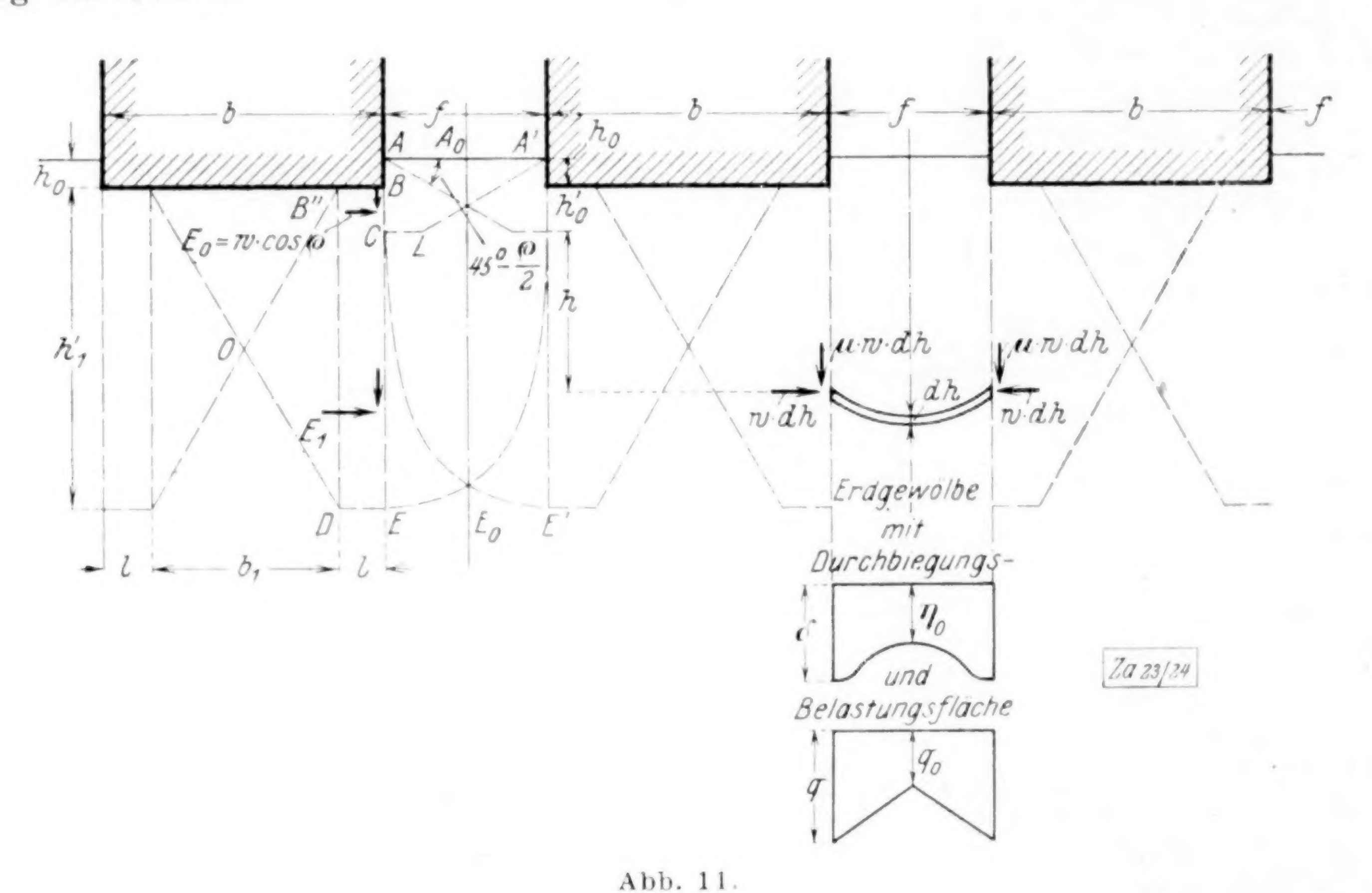


Abb. 11.
Benachbarte Grundbauten.

Werden durch die Kanten A und A' lotrechte Ebenen gelegt, so kann für jede Tiefe die widerstehende seitliche Erdspannung aufgetragen werden; beginnend von der Grundbaukante ist der oberste Teil dieser seitlichen Pressungsfläche übereinstimmend mit der Pressungsfläche im unbegrenzten Erdreich; den unteren Abschluß dieses Teiles bildet die vom Oberflächenpunkt A bezw. A' ausgehende Gleitfläche; gemäß den Annahmen und Ausführungen von S. 21 ist $CL = BC \cos^4 \varrho$, also

$$(AB + BC) = (f - BC \cos^4 \varrho) \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right) \text{ oder } BC = \frac{-h_0 + f \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{1 + \cos^4 \varrho \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}.$$

Die Pressungsfläche ist auf diesem oberen Teil geradlinig begrenzt; der Erddruck gegen Fläche BC ist gemäß Gleichung (II)

$$W = \frac{\gamma}{\cos 2\varrho}\left[\frac{\varepsilon h_0^1}{2}(h_0 2 + h^1_0) \cos \varrho + h^1_0 (h_0 + h^1_0) \cos^4 \varrho \sin \varrho\right] \quad . \quad (\text{XXI}),$$

ferner ist die schräge Erdspannung im Punkt C

$$w_1 = \frac{\gamma}{\cos 2\varrho}[\varepsilon (h_0 + h^1_0) \cos \varrho + (h_0 + 2h^1_0) \cos^4 \varrho \sin \varrho] \quad . \quad . \quad (\text{XXII}).$$

Gegen die lotrechte Mittelebene A^0E^0 wirkt die Spannung winkelrecht, hier sind daher die Gleitebenen symmetrisch unter dem Winkel $45^0 - \frac{\varrho}{2}$ geneigt; erfolgt also eine gegenseitige Näherung der Ebenen AE und $A'E'$, so schieben sich im Bereich der Mittelebene die Lamellen auf den unter $45^0 - \frac{\varrho}{2}$ geneigten Gleitebenen zusammen, so daß das Erdreich zwischen den Ebenen AE und $A'E'$ nach oben wandert, volle Reibung an diesen verursachend. Ebenso wie die Gleitebenen allmählich aus der lotrechten Richtung AE und $A'E'$ in die flache Neigung $45^0 - \frac{\varrho}{2}$ an der Mittelebene übergehen, geht auch die zur Lotrechten zugehörige Kraftrichtung aus der Neigung an den Seiten-

ebenen allmählich in die wagerechte Richtung an der Mittelebene über; man kann sich daher das Erdreich zerlegt denken in Gewölbestreifen von beliebig geringer Stärke, deren Leibung gleichlaufend derjenigen Hauptspannung ist, die die Mittelebene wagerecht schneidet und deren Stützlinie daher in der Mitte der beiden Gewölbeleibungen verläuft, an jeder Stelle die Richtung des Höchstwertes der Erdspannung angebend.

Jedes dieser gedachten Gewölbe hat seine elastische Linie der lotrechten Durchbiegungen, wie sie seiner Belastung entspricht; von letzterer ist bekannt, daß ihre Gesamtgröße für ein Gewölbe von der Stärke der Längeneinheit der Wand AE den Wert hat $2\,\mathrm{tg}\,\varrho\,w$; jedes Gewölbe von der lotrecht gemessenen Stärke dh überträgt daher die Kraft $2\,\mathrm{tg}\,\varrho\,w\,dh$ in die unterliegenden Schichten. Ist η die Ordinate der Durchbiegungsfläche in der Entfernung x von der Ebene AE, und δ die Senkung des Kämpferpunktes des gedachten Gewölbes, so ist $\delta-\eta$ die tatsächliche Senkung des betrachteten Punktes; da dicht gelagerter Boden vorausgesetzt wird, dem elastische Eigenschaften zuzusprechen sind, so ist die Ordinate der Belastungsfläche $q = C(\delta-\eta)$, wenn C die Bettungsziffer ist; es ist dann $2\,w\,\mathrm{tg}\,\varrho\,dh = C\int_0^f (\delta-\eta)\,dx$.

Die Ableitung von η aus den elastischen Grundwerten des gedachten Gewölbes ist hier nicht beabsichtigt, da sie umständlich ist und zu weit vom Wege abführen würde; der obige Gedankengang wurde entwickelt, um zu zeigen, daß die in der Literatur sich häufig findende Annahme der Gleichheit der Ordinaten q für sämtliche Punkte einer und derselben wagerechten Ebene nicht zutreffen kann; denn wenn schon bei den gedachten Gewölben die Belastungsordinate der Mittelebene A^0E^0 kleiner ist als die Ordinate $C\delta$ des Kämpferpunktes, so muß diese Verschiedenheit noch stärker hervortreten, wenn das Gewölbe ersetzt gedacht wird durch ein scheitrechtes Erdgewölbe, wie es durch zwei wagerechte benachbarte Ebenen herausgeschnitten wird.

Es sei hier die Mittelordinate q_0 halb so groß angenommen wie die Kämpferordinate und ferner die tatsächlich gekrümmte Belastungslinie zwischen diesen Ordinaten durch gerade Linien ersetzt. Dann ist $2\,\mathrm{tg}\,\varrho\,w\,dh = {}^3/_2\,f\,q_0$. Nun ist aber die lotrechte Spannung σ in der Mittelebene $A_0E_0 = w_0\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$, wenn w_0 die wagerechte Spannung ist; also

$$\frac{d\sigma}{dh}dh = q_0 + \gamma\,dh = \frac{dw^0}{dh}dh\,\mathrm{tg}^2\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right) \text{ und } q_0 = \frac{dw_0}{dh}dh\,\mathrm{tg}^2\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right) - \gamma\,dh;$$

ferner
$$2\,\mathrm{tg}\,\varrho\,w\,dh = {}^3/_2\,f\frac{dw_0}{dh}dh\,\mathrm{tg}^2\left(45-\frac{\varrho}{2}\right) - {}^3/_2\,f\,\gamma\,dh;$$

es sei $\mathrm{tg}\,\varrho = \mu$ und $\mathrm{tg}^2\left(45^0-\frac{\varrho}{2}\right) = \varepsilon'$ gesetzt, dann ist $\frac{dw_0}{dh} = \frac{4\,\mu\,w}{3\,f\,\varepsilon'} + \frac{\gamma}{\varepsilon'}$. Wird die geringe Ungenauigkeit in Kauf genommen, die bei der Gleichsetzung der wagerechten Spannung w_0 der Mittelebene mit der wagerechten Randspannung w in gleicher Höhe begangen wird, wird ferner der durchaus nebensächliche Einfluß des Eigengewichtes des Gewölbestreifens vernachlässigt, so wird

$$w = w_1\,e^{\frac{4\mu h}{3\varepsilon' f}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXIII)}.$$

Hierbei ist w_1 die wagerechte Spannung für $h = 0$. Ferner ist

$$E = w_1\,\frac{3\,\varepsilon' f}{4\,\mu}\left(e^{\frac{4\mu h}{3\varepsilon' f}} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(XXIV)},$$

wenn W die wagerechte Seitenkraft des Gesamt-Erddruckes gegen die lotrechte Randfläche von der Höhe h ist. Hiernach läßt sich für jeden Punkt der Ebene AE die Erdspannung und der oberhalb wirkende Gesamt-Erddruck angeben.

Ist nun die gegenseitige Entfernung der Grundbauten eine geringe, so findet bereits in geringer Tiefe eine solche Zunahme der widerstehenden Erdspannung statt, daß der Kleinstwert der Grundbau Tragkraft sich bei einer bedeutend flacheren Neigung der Hauptgleitflächen ergeben muß, als im uneingeengten Erdreich. Ergibt sich dabei eine vom Winkel $45^0 + \frac{\varrho}{2}$ wesentlich abweichende Neigung, so ist der durch Annahme ihrer Geradlinigkeit begangene Fehler zu groß, um in Kauf genommen werden zu dürfen; es ist vielmehr unter der Grundbau Sohlenmitte ein Doppelkeil geringerer Breite anzunehmen, der die von ihm umfaßten Gleitkeile $B''OD$ derart hinauspreßt, daß diese die Erdkörper $BB''DE$ vor sich fort dem längs Ebene AE wirkenden Erddruck entgegenpressen.

Wird BB'' mit l bezeichnet, so ist $B''D = (b-2l)\,\mathrm{tg}\,\alpha$; es liegen hier gleiche Verhältnisse und die gleiche Wirkungsweise vor, wie bei dem in Gleichung X behandelten Falle beschränkter Schichthöhe; wenn in Fläche AE die Spannung mit der Tiefe zunimmt, kann in Fläche $B''D$ mit gleichmäßig verteilter Spannung gerechnet werden unter gleichzeitigem logarithmischen Anwachsen der mittleren Spannung; ist $w = \frac{W}{BE}\cos\varrho$ die mittlere Spannung von BE, so kann gemäß Gleichung (X) die Tragkraft mit dem Betrag angesetzt werden:

$$P = \frac{3\,(b-2l)}{2\,\mu\,\varepsilon}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,w\,\varepsilon\left(e^{\frac{4\,l\,\mu\,\varepsilon}{3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(b-2l)}} - 1\right) + w\,\varepsilon\left(e^{\frac{4\,l\,\mu\,\varepsilon}{3\,(b-2l)\,\mathrm{tg}\,\alpha}}\right)(b-2l) \qquad \text{(XXV)}.$$

In dieser Gleichung sind l und α unbekannt; zu ihrer Bestimmung stehen die Bedingungen zur Verfügung:

$$\frac{dP}{dl} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXVI)}. \qquad \frac{dP}{d\alpha} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{(XXVII)}.$$

Der mit Hilfe von Versuchsrechnungen durchzuführende Gang der Rechnung wäre der, daß zunächst l mit bestimmtem Betrag angenommen wird und derjenige Wert α ermittelt wird, der für dieses l den Geringstwert der Tragkraft P ergibt; wird für mehrere angenommene Werte l diese Rechnung geführt, so ergibt sich die Tragfähigkeit als der Geringstwert aller einzelnen Werte P. Eine die Genauigkeit nur in geringem Maße beeinträchtigende Vereinfachung wird jedoch erhalten, wenn $\alpha = 45^0 + \frac{\varrho}{2}$ gesetzt wird.

Rechnungen auf Grund des obigen Verfahrens zeigen, daß die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Grundbauten mit abnehmender Entfernung außerordentlich stark wächst; die Anwendung auf den Querschwellen-Oberbau läßt erkennen, daß die gegenseitige günstige Beeinflussung der einzelnen Schwellen eine so große ist, daß sie in allererster Linie als Grund für die Ueberlegenheit des Querschwellen-Oberbaues über den Langschwellen-Oberbau anzusehen ist; die Tragfähigkeit je Flächeneinheit der Grundfläche ist für die Querschwelle wesentlich größer als für die Langschwellen, deren gegenseitiger Abstand größer ist als die Reichweite der gegenseitigen Beeinflussung.

Zwar sind die obigen Berechnungen auf die Voraussetzung gegründet, daß die sämtlichen Grundbauten der betrachteten Reihe voll belastet sind; offenbar bleibt jedoch die Tragfähigkeit eines voll belasteten Grundbaues trotz geringerer Belastung der Nachbar-Grundbauten unvermindert, so lange letztere starr in ihrer Höhenlage gegen Ausweichen nach oben gesichert werden. Die Starrheit der Schienen ist nun bekanntlich so groß, daß bei Belastung einer Querschwelle auch die Nachbarschwelle um einen gewissen Betrag abwärts gepreßt wird, so daß die Berechnung auf Grund der Gleichungen (XXI) bis (XXVII) statthaft ist.

In nachstehenden Zahlentafeln seien die für zwei verschiedene Schwellenanordnungen errechneten Tragfähigkeitswerte und ihre Entwicklung gegeben. Die hohe Tragfähigkeit für je 1 cm Schwellenlänge erstreckt sich selbstredend nicht über die ganze Schwellenlänge, sondern ist entsprechend der Durchbiegung der Schwellen auf den unter den Schienen liegenden Teil der Schwelle beschränkt, um nach der Schwellenmitte hin abzunehmen.

Zahlentafel 2.

Schwellenbreite 24 cm. Bettungstiefe über Schwellensohle 12 cm. Schwellenabstand 75 cm.

$\varrho = 40^0$, $\gamma = 1{,}6$, $\varepsilon = 4{,}6$, $h_0' = 10{,}2$ cm, $w_0 = 0{,}785$ at, $E_0 = 6{,}16$ kg.

$$E_1 = w_0\,{}^3/_4\,\frac{f}{\varepsilon\,\mu}\left(e^{{}^4/_3\frac{h\,\mu\,\varepsilon}{f}} - 1\right) = 7{,}8\left(e^{0{,}1128\,h} - 1\right)$$

$$P = p_1\,{}^3/_2\,\frac{h_1'}{\varepsilon\,\mu}\left(e^{{}^4/_3\frac{l\,\mu\,\varepsilon}{h_1'}} - 1\right) + p_1\,e^{{}^4/_3\frac{l\,\mu\,\varepsilon}{h_1'}}\,b' = p_1\,h_1'\,0{,}389\left(e^{5{,}14\frac{l}{h_1'}} - 1\right) + p_1\,b'\,e^{5{,}14\frac{l}{h_1'}}.$$

l	b'	h_1'	$h = h_1' - h_0'$	E_1	$w_1 = \frac{E_1 + E_0}{h_1'}$	$p_1 = w_1\,\varepsilon$	P
5 cm	14 cm	30,0 cm	19,8 cm	64,8 kg	2,36 at	10,88 at	529 kg
6 »	12 »	25,7 »	15,5 »	37,1 »	1,68 »	7,74 »	487 »
7 »	10 »	21,4 »	11,2 »	19,7 »	1,21 »	5,57 »	500 »

Der Kleinstwert liegt bei $l = 6$ cm. die Tragfähigkeit für je 1 cm Schwelle beträgt im Bereich der Schiene $P = 487$ kg.

Zahlentafel 3.

Schwellenbreite 26 cm. Bettungstiefe über Schwellensohle 12 cm. Schwellenabstand 66 cm
$\varrho = 40^0$, $\gamma = 1{,}6$, $\varepsilon = 4{,}6$, $h_0' = 5{,}74$ cm, $w_0 = 0{,}622$ at, $E_0 = 3{,}0$ kg.

$$E_1 = 5{,}84\left(e^{0{,}1285\,h} - 1\right) \quad P = p_1\,h_1'\,0{,}389\left(e^{5{,}14\frac{l}{h_1'}} - 1\right) + p_1\,b'\,e^{5{,}14\frac{l}{h_1'}}.$$

l	b'	h_1'	$h = h_1' - h_0'$	E_1	$w_1 = \frac{E_1 + E_0}{h_1'}$	$p_1 = w_1\,\varepsilon$	P
6 cm	14 cm	30,0 cm	24,3 cm	121,0 kg	4,13 at	19,0 at	1142 kg
7 »	12 »	25,7 »	20,0 »	76,5 »	3,09 »	14,2 »	1122 »
8 »	10 »	21,4 »	15,7 »	44,0 »	2,20 »	10,1 »	1177 »
9 »	8 »	17,1 »	11,4 »	25,3 »	1,655 »	7,62 »	1346 »

Der Kleinstwert liegt bei $l = 7$ cm, die Tragfähigkeit der Schwelle beträgt im Bereich der Schiene. $P = 1122$ kg für je 1 cm Schwelle.

Zum Vergleich sei angeführt, daß die rechnerische Tragfähigkeit einer 26 cm breiten Einzelschwelle (ohne Nachbarschwellen) sich unter sonst gleichen Verhältnissen zu 125 kg für je 1 cm ergibt.

Es ist beachtenswert, daß sich die erforderliche Bettungshöhe, in der sich der hauptsächlichste Kraftausgleich vollzieht, in obigen Rechnungen mit demjenigen Wert ergibt, der in der Praxis sich als wünschenswerte Mindesthöhe herausgestellt hat (20 bis 30 cm).

3. Kreisförmiger Grundbau. Es sei nun von dem in der Längsrichtung sich unverändert erstreckenden Grundbau-Querschnitt zur Kreis-Scheibensohle (s. Abb. 12) übergegangen, bei der die die Tragfähigkeit bedingenden wagerechten Erdspannungen nicht mehr einander gleichlaufend ausgerichtet sind, sondern strahlig zur lotrechten Mittelachse hin. Da außer den Strahlspannungen die zu ihnen in bestimmten Wechselbeziehungen stehenden Ringspannungen auftreten, so kommen hier dreidimensionale Spannungsbeziehungen in Betracht, die für Erdkörper erst wenig erforscht sind.

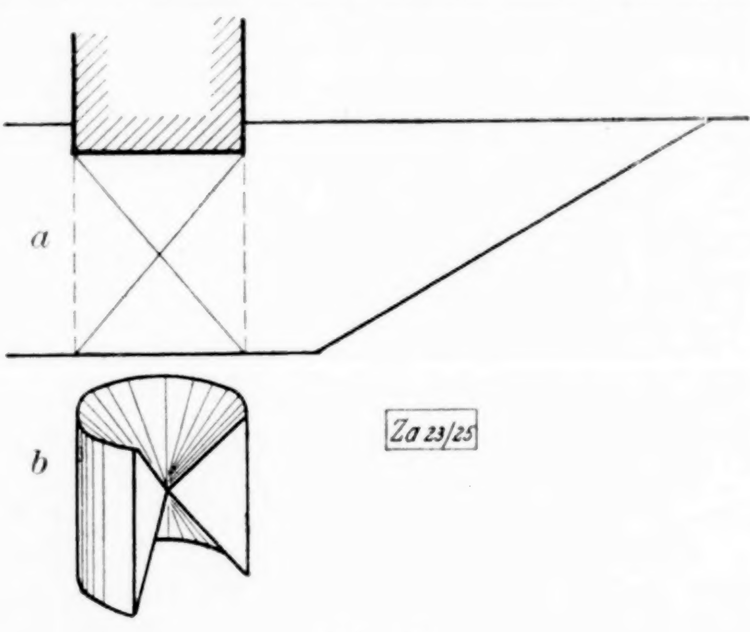


Abb. 12.
Gleitkörper unter Kreissohle.
a Gesamtschnitt, *b* Gleitkeilring aufgeschnitten.

Zunächst ist festzustellen, daß dort, wo Ringspannung gleich Strahlspannung ist, genau dieselben Spannungs-Beziehungen herrschen, wie im System rechtwinklig ausgerichteter Spannungen; es ist ferner festzustellen, daß im Grenzzustand tätigen Erddrucks alle zur Größtspannung winkelrecht stehenden Spannungen eines Punktes einander gleich sind und zwar gleich der Kleinstspannung des Punktes. Beides trifft aber für den mittleren Höhenteil des bei Erreichung der Tragfähigkeit herausgepreßten Gleitkeiles zu, denn hier sind die Strahlspannungen wagerechte Kleinstspannungen, während die Achse der Größtspannungen lotrecht ist; da nun der Grenzzustand tätigen Erddrucks unter der Grundbau-Sohle herrscht, so sind hier die Ringspannungen gleich den Strahlspannungen; gerade in diesem für die Tragfähigkeit in ganz überwiegendem Maße maßgebenden Teil herrschen daher die gleichen Spannungsbeziehungen, wie unter dem längserstreckten Grundbau. Im oberen wie im unteren Teil des herausgepreßten Gleitkeiles richtet sich die Richtung der Größtspannungen schräg; hier ist die Ringspannung von der Strahlspannung verschieden.

Wenn einerseits mit wachsender Entfernung von der wagerechten Mitten-Ebene die Abweichung der Größtspannungsrichtung von der Lotrechten und somit auch die Verschiedenheit von wagerechter Seitenkraft der Strahlspannung und Ringspannung zunimmt, so nimmt andererseits der Einfluß dieser Verschiedenheit auf die Tragfähigkeit

ab, da gleichzeitig die Ringbreite des Gleitkeiles abnimmt und die wagerechte Entfernung der Ring-Querschnittsfläche von der lotrechten Drehachse zunimmt.

Wird der Einfluß der Verschiedenheit von Ring- und Strahlspannung vernachlässigt, so wird eine Ungenauigkeit zugunsten der Sicherheit der Rechnung begangen. Ueberschlägliche Durchrechnungen zeigen, daß mit einer Ungenauigkeit von 10 vH zu rechnen ist, um die die rechnerische Tragfähigkeit zu gering bemessen wird.

Für Grundbauten von Kreisflächensohle sei daher der Winkel α und die Sohlenpressungsfläche nach Gleichung (IV) bis (VII) so errechnet, als wenn ein längserstreckter Grundbau von der Breite des Kreisflächen-Durchmessers zur Berechnung stünde; sind p_0 die Randpressung und p_1 die Achspunktpressung auf diese Weise errechnet, so ergibt sich die Tragfähigkeit zu

$$P = r^2 \pi \left\{ p_0 + \frac{p_1 - p_0}{3} \right\} = r^2 \pi \, (2 p_0 + p_1) \, {}^1/_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{XXVII}).$$

Hat man einen Grundbau von quadratischem Grundriß, so kann man sich das Quadrat zusammengesetzt denken aus einem Kreis und den vier Eckansätzen; unter den Ansätzen weicht der Boden bei seiner Ueberbeanspruchung quer zu den durch die Quadratmitte gehenden Symmetrie-Achsen aus; die Sohlenpressung jeden Punktes dieser Ansätze und ihre Tragfähigkeit läßt sich daher nach Gleichung (IV) bis (VII) berechnen; unabhängig von ihnen bildet sich unter der Kreisfläche bei entsprechender Steigerung der Belastung der Haupt-Gleitkörper, der das Erdreich außerhalb des durch den Kreisrand gelegt gedachten Rohrmantels nach außen schiebt. Der Umstand, daß das Ausweichen des Bodens unter den Ansatzflächen (besonders unter den Eckpunkten) lange vor Erreichung und Ausnutzung der Gesamt Tragfähigkeit eintreten muß, deutet darauf hin, daß es vom Standpunkt einer gleichmäßigen Ausnutzung der Boden tragfähigkeit ratsam ist, die quadratische Fläche in eine achteckige Fläche von gleichem Inhalt umzuwandeln.

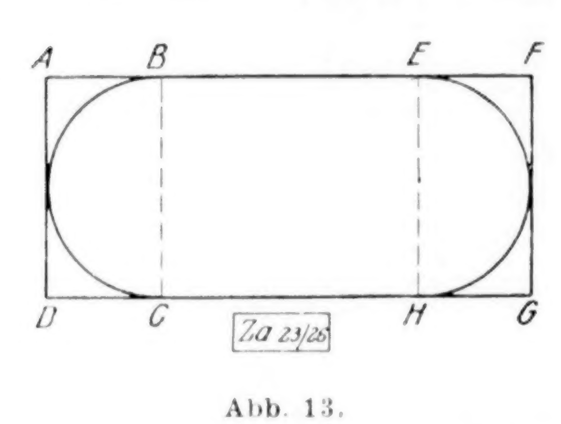


Abb. 13.
Zerlegung der rechteckigen Grundfläche.

Eine rechteckige Grundfläche (s. Abb. 13) kann zerlegt werden in die beiden Halbquadrate $ABCD$ und $EFGH$ und in das Mittelrechteck $BCHE$; die Tragfähigkeit der ersteren kann nach den soeben angegebenen Gesichtspunkten ermittelt werden, die des Mittelstückes so, als ob es sich um einen Ausschnitt eines längserstreckten Grundbaues handelte.

Wenn in Obigem der widerstehende Erddruck gegen die Rohrmantelfläche mit demselben Betrag eingesetzt wird, wie er sich nach den üblichen Regeln für rechtwinklig ausgerichteten Erddruck ergibt, so liegt hierin eine gewisse rechnerische Sicherheit; wie Verfasser in seinem Aufsatz »Vom Rammpfahl« (Beton und Eisen 1921, Februarheft) nachwies, ist strahlig ausgerichteter widerstehender Erddruck größer als rechtwinklig ausgerichteter widerstehender Erddruck und zwar um so größer, je größer das Verhältnis h/r ist; bei dem für Flachgründungen üblichen Verhältnis h/r spielt dieser Gesichtspunkt keine Rolle; dagegen ist er bei Pfahlgründungen von wesentlicher Bedeutung. Hier spielt die Elastizität bezw. die Verdichtungsfähigkeit des Bodens eine große Rolle, da die bei der Senkung des Grundbaues verdrängte Masse von den seitlichen Räumen aufgenommen wird, so daß die von den Sohlenkanten des Grundbaues ausgehenden Hauptgleitflächen zwar unter ihm und in seiner Nähe in der auf Abb. 12 dargestellten Weise zu verfolgen sind; in gewisser Entfernung vom Grundbau verschwinden sie jedoch, da hier der verdrängte Boden durch Verdichtung der innerhalb dieser Grenzentfernung liegenden Massen bereits aufgenommen ist und eine seitliche Verschiebung außerhalb des Grenz-Abstandes nicht mehr erfolgt.

Die oben entwickelten Gleichungen gelten daher nur für flachgegründete Bauten, während für Tiefgründungen, bei denen das Verhältnis h/r einen größeren Wert annimmt, die Boden-Verdichtung etwa in der Weise berücksichtigt werden muß, wie es im Nachtrag zum erwähnten Aufsatz »Vom Rammpfahl« (Beton und Eisen 1921, Heft VII bis VIII) entwickelt ist.

4. Vergleich der Theorie mit der Wirklichkeit. Es seien zum Schluß einige Versuchs Ergebnisse wiedergegeben, vor allem die der Kurdjümoffschen Versuche: Kurdjümoff hielt im Lichtbild die Verschiebung von runden Sandkörnern unter einem

abwärts gepreßten Grundbau-Modell fest; auf einer Platte, die während eines kurzen Bewegungs-Abschnitts belichtet ist, erscheinen dabei die runden Sandkörner als Ellipsen, deren große Achse die Bewegungsrichtung angibt. Ist die oben entwickelte Theorie richtig, so müssen die Ellipsen die in Abb. 14 dargestellte Lage haben; eine genaue Nachprüfung der Kurdjümoffschen Abbildungen ergibt die Richtigkeit der entwickelten Theorie.

Eine weitere Bestätigung ist in den von E. Schubert unternommenen und in der Zeitschrift für Bauwesen 1889 und 1891 veröffentlichten Versuchen über Tragfähigkeit von Bahngleisen zu sehen.

Schubert belastete das Gleismodell bis zum Einsinken der Unterstopfung, unterstopfte frisch und belastete von neuem und wiederholte das Verfahren, bis die Kofferung eine solche Schichtstärke erreicht hatte, daß die unteren Kofferungs-Schichten fest lagen und ein Ausweichen nur noch in den oberen Schichten erfolgte; in einzelnen der Versuche hatte er in Schwellenmitte ein Band eingeführt, dessen Ende von der abwärts wandernden Kofferung mitgenommen wurde; zunächst wanderte es lotrecht abwärts; in bestimmten Tiefen angekommen, wanderte der unterste Teil weiter abwärts, während ein kurzes, in dieser Tiefe unter Schwellensohle befindliches Bandteil seitlich ausgezackt wurde, teils nach rechts, teils nach links ohne Bevorzugung einer bestimmten Seite (s. Abb. 15).

Abb. 14.
Verzerrtes Lichtbild runder Sandkörner bei Grundbau-Senkung.

Abb. 15.
Bandverdrückung durch Gleitkeilbildung.
(Aus E. Schubert, Ztschr. f. Bauwesen, 1889.)

Offenbar mußte der im Zwillings-Spitzenkörper liegende Bandteil entsprechend der Bewegungsrichtung sämtlicher in ihm enthaltenen Erdteilchen lotrecht abwärts wandern, während der jeweils in seiner Doppelspitze liegende Teil leicht in die seitlich

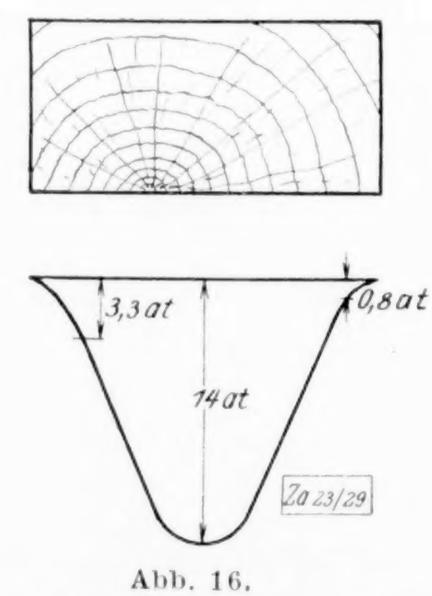


Abb. 16.
Pressungsfläche unter Schwelle nach amerikanischen Versuchen.
(Eng. News-Record, 1920.)

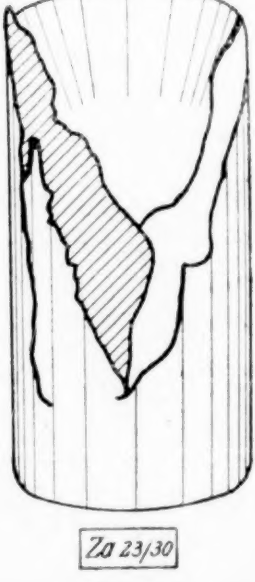


Abb. 17.
Kegelförmiger Bruch eines Sandsteinzylinders.
(Nach Th. v. Kármán, Ztschr. d. V. d. I., 1911.)

abwandernden Gleitkörper gelangte, wenn er nicht genau durch die mathematische Spitze lief.

Als weiterer Beleg sei nebenstehend eine Abbildung der tatsächlichen Pressungsfläche wiedergegeben, wie sie nach amerikanischen Versuchen durch genaue Messungen unter einem belasteten Bahnschwellen-Modell festgestellt wurde; man vergleiche Abb. 16 mit der theoretisch abgeleiteten Form der Spannungsfläche von Abb. 5.

Zur Erläuterung der Wirkung von Grundbauten mit Kreis-Sohle sei nebenstehend ein unter allseitigem hohen Druck zerstörter Körper dargestellt, entsprechend den v. Kármánschen Versuchsergebnissen[1]. Der Körper war allseitigem hohen Druck ausgesetzt worden, wobei das Verhältnis von Kopflast zu seitlichem Druck veränderlich gehalten werden konnte; vor Erreichen der Bruchlast bestand die Formänderung in einer gleitend fließenden Bewegung innerhalb des Körpers ohne Verlust der Festigkeit; er kann daher aufgefaßt werden als ein unter allseitigem sehr hohen Druck stehender Körper von Erdeigenschaften, der durch eine auf seine Kopffläche aufgebrachte Zusatzlast bis zum Ueberschreiten der Tragfähigkeit belastet ist; es entstand dabei der typische Druck-Doppelkegel, wie dessen Gestalt gemäß Abb. 12 im theoretischen Teil abgeleitet wurde.

189

Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung in Polarkoordinaten.

Von **R. NEUENDORFF** in Kiel.

Das Lord Kelvinsche Verfahren, Differentialgleichungen zweiter Ordnung halb rechnerisch, halb zeichnerisch zu lösen, läßt sich im Polarkoordinatensystem mit Benutzung der Polarsubnormalen besonders einfach durchführen[2]. Im folgenden soll gezeigt werden, wie es sich auf gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung übertragen läßt. Weiter wird, anknüpfend an die Ergebnisse einer Arbeit von R. Rothe[3], ein rein zeichnerisches Verfahren angegeben, um die erste Näherungslösung bis zur zeichnerisch größtmöglichen Genauigkeit zu verbessern.

1. Die Konstruktion der ersten Näherungslösung. Bekanntlich ist $d\varrho : d\varphi = \varrho'$ gleich der Länge der Polarsubnormalen. Ist eine Kurve im Polarkoordinatensystem gegeben — sie sei ϱ-Kurve genannt —, und zeichnet man sämtliche Polarsubnormalen, so liegen deren Endpunkte auf einer neuen Kurve, die ϱ'-Kurve heißen möge. Betrachtet man diese ϱ'-Kurve in einem um 90^0 gedrehten Achsenkreuz, so sind ihre Polarsubnormalen $d^2\varrho : d\varphi^2 = \varrho''$, und die Endpunkte derselben liegen auf der ϱ''-Kurve. So kann man beliebig fortfahren.

Der Einfachheit wegen sei eine Gleichung dritter Ordnung als gegeben angenommen. Die Uebertragung auf Gleichungen n ter Ordnung bietet nichts Neues. Es sei also die Gleichung gegeben: $\frac{d^3\varrho}{d\varphi^3} = \sigma\left(\varphi, \varrho, \frac{d\varrho}{d\varphi}, \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right)$ oder kürzer geschrieben:

$$\varrho''' = \sigma(\varphi, \varrho, \varrho', \varrho'') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

mit den Anfangswerten: $\varphi_0, \varrho_0, \varrho_0', \varrho_0''$.

In Abb. 1 ist P_0 der Anfangspunkt. Man ziehe $O\,Q_0$ senkrecht $O\,P_0$ und mache $O\,Q_0 = \varrho_0'$; dann verlängere man $O\,P_0$ um $O\,S_0 = \varrho_0''$ und für das Spätere auch gleich $O\,Q_0$ um $O\,T_0 = \varrho_0'''$. Dabei sind zunächst ϱ_0', ϱ_0'' und ϱ_0''' sämtlich positiv gedacht. Weiter berechne man die Krümmungsradien der ϱ-Kurve und der ϱ'-Kurve:

$$R_0 = \frac{(\varrho_0^2 + \varrho_0'^2)^{3/2}}{\varrho^2 + 2\,\varrho_0'^2 - \varrho_0\,\varrho_0''} \quad \text{und} \quad R_0' = \frac{(\varrho_0'^2 + \varrho_0''^2)^{3/2}}{\varrho_0'^2 + 2\,\varrho_0'' - \varrho_0'\,\varrho_0'''},$$

und mache $P_0\,Q_0\,M_0 = R_0$ und $Q_0\,S_0\,M_0' = R_0'$. Um M_0' beschreibe man einen kleinen Kreisbogen $Q_0\,Q_1$ mit R_0', verbinde Q_1 mit O, errichte auf $O\,Q_1$ das Lot in O und be-

[1] s. v. Kármán: Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 1911).

[2] R. Neuendorff, Zeichnerische Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in Polarkoordinaten. Diese Zeitschrift II, 1922, S. 135.

[3] Rudolf Rothe, Zur graphischen Integration von Differentialgleichangen zweiter Ordnung. Zeitschrift für Mathematik und Physik 64, 1916, S. 90.

schreibe um M_0 einen kleinen Kreisbogen $P_0 P_1$ mit R_0 bis zum Schnittpunkt mit jenem Lot. Dann ist P_1 näherungsweise ein Punkt der gesuchten Integralkurve.

Jetzt fährt man so fort: $Q_1 M_0'$ wird als Normale der ϱ'-Kurve im Punkte Q_1 aufgefaßt, so daß die Verlängerung von $O P_1$ diese Normale in einem Punkte S_1 schneidet, für den $O S_1 = \varrho_1''$ ist. Da aber $O P_1 = \varrho_1$, $O Q_1 = \varrho_1'$ und $\measuredangle P_1 O x = \varphi_1$ bekannt sind, so kann man $\varrho_1''' = \sigma(\varphi_1, \varrho_1, \varrho_1', \varrho_1'')$ und R_1 und R_1' berechnen und das bisherige Verfahren genau wiederholen.

Die Polarsubnormalen ϱ_0', ϱ_0'', ϱ_0''' können auf den Loten zu $O P_0$, $O Q_0$, $O S_0$ je nach zwei Seiten abgetragen werden. Bezeichnet man mit η, η', η'' die Winkel, die die ϱ-, ϱ'-, ϱ''-Kurven mit den zugehörigen Radienvektoren bilden, so ist $\operatorname{tg} \eta_0 = \varrho_0 : \varrho_0'$, $\operatorname{tg} \eta_0' = \varrho_0' : \varrho_0''$, $\operatorname{tg} \eta_0'' = \varrho_0'' : \varrho_0'''$. Aus diesen Gleichungen bestimmt man, ob die Winkel spitz oder stumpf sein müssen und damit, nach welcher Seite die Polarsubnormalen abzutragen sind.

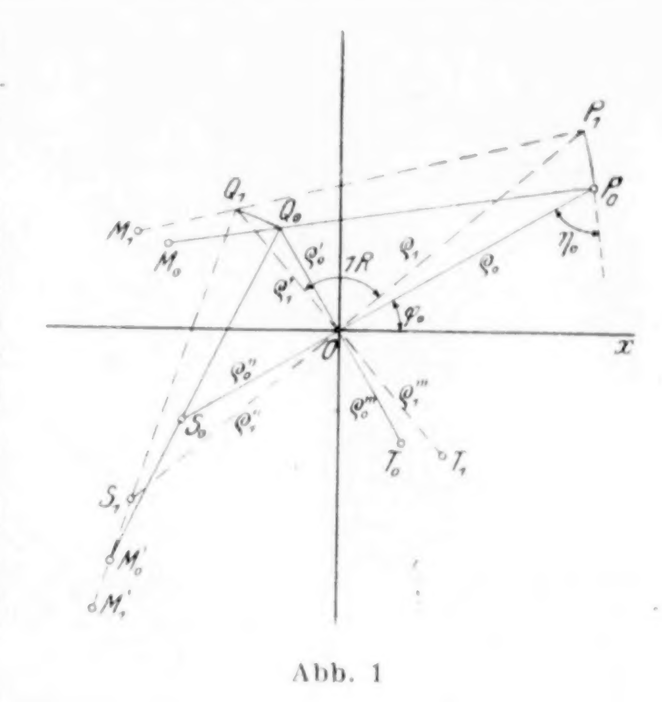


Abb. 1

2. Die Berechnung der Krümmungsradien. Die Formel für die Krümmungsradien läßt sich vereinfachen. In Abb. 2 ist $s^2 = \varrho^2 + \varrho'^2$ und $t^2 = \varrho\,\varrho''$. Beide Strecken kann man, ohne den Halbkreis wirklich zu zeichnen, unmittelbar mit dem Zirkel abgreifen. Zu beachten ist, daß t^2 das negative Vorzeichen erhält, wenn ϱ'' negativ ist, wenn also ϱ'' auf $O P$ liegt. Auch dann wird man praktisch ϱ'' wie in der Abb. 2 abtragen, um $-t^2$ zu finden. Jetzt ist

$$R = \frac{s^3}{s^2 + \varrho'^2 - t^2}.$$

Die Ausrechnung ist sehr einfach. Man kann aber auch zwei Nomogramme entwerfen, eins mit quadratischen Teilungen für $\lambda^2 = s^2 + \varrho'^2 - t^2$ und eins mit logarithmischen Teilungen für $R = s^3 : \lambda^2$. In besonderen Fällen kann es empfehlenswert sein, für R' ein neues Nomogramm zu zeichnen, wenn durch Einsetzen von $\varrho''' = \sigma$ eine Vereinfachung erzielt wird. Ebenso kann ϱ''' unter Umständen am schnellsten nomographisch ermittelt werden.

Werden R oder R' sehr groß, so ersetzt man das Bogenstückchen durch ein Lot auf der Kurvennormalen.

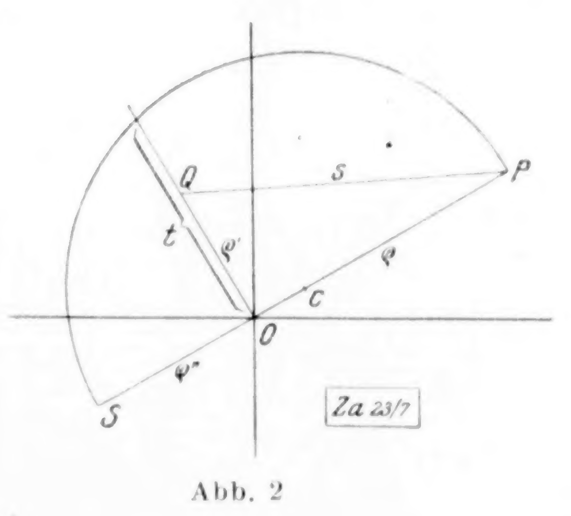


Abb. 2

3. Genauere Konstruktion der ersten Näherungslösung. Damit die zeichnerische Verbesserung der ersten Näherung möglichst weitgehend konvergiert, empfiehlt es sich zuweilen schon bei der ersten Lösung die Krümmungskreise statt mit den errechneten mit mittleren Krümmungsradien zu beschreiben, wie zuerst von C. Runge[1]) angegeben und von R. Rothe[2]) eingehender begründet wurde.

4. Die zeichnerische Verbesserung der ersten Näherungslösung. Die erste teils durch Rechnung, teils durch Zeichnung gefundene Integralkurve kann rein zeichnerisch verbessert werden. Unter gewissen einschränkenden Bedingungen erhält man bekanntlich[3]) bessere Lösungen durch sukzessive Approximation nach folgenden Formelreihen:

$$\varrho_1'' = \varrho_0'' + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho''' \, d\varphi; \quad \varrho_1' = \varrho_0' + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho_1'' \, d\varphi; \quad \varrho_1 = \varrho_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho_1' \, d\varphi;$$

hieraus $\varrho_1''' = \sigma(\varphi, \varrho_1, \varrho_1', \varrho_1'')$ bestimmt, liefert die verbesserte Lösung ϱ_2 aus

$$\varrho_2'' = \varrho_0'' + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho_1''' \, d\varphi; \quad \varrho_2' = \varrho_0' + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho_2'' \, d\varphi; \quad \varrho_2 = \varrho_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \varrho_2' \, d\varphi \text{ usw.}$$

---

[1]) C. Runge, Graphische Methoden. Leipzig und Berlin 1915, S. 132.

[2]) R. Rothe, a. a. O., S. 92.

[3]) Siehe z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik. Leipzig 1914, 3. Bd., S. 416.

Die Integrale sind die Bögen im mittleren Abstand von O innerhalb eines kleinen Intervalls $\Delta\,\varphi$, wie ich schon früher gezeigt habe[1]). Das Verbesserungsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung ist einfach fortlaufend, mit der ϱ_0'''-Kurve beginnend anzuwenden. Wenn man die verbesserte ϱ_1-Kurve gefunden hat, ist daraus zeichnerisch eine neue ϱ_1'''-Kurve abzuleiten, indem man mit Hilfe von Normalen an die ϱ_1-Kurve eine neue ϱ'-Kurve, aus dieser eine neue ϱ''-Kurve und daraus endlich die ϱ_1'''-Kurve ableitet, die der nächsten Verbesserung zugrunde zu legen ist. Die Normalen lassen sich mit einem Spiegellineal sehr genau zeichnen. Die Konvergenzgrenzen des Verfahrens erkennt man auch hier wie früher gezeigt[2]). 209

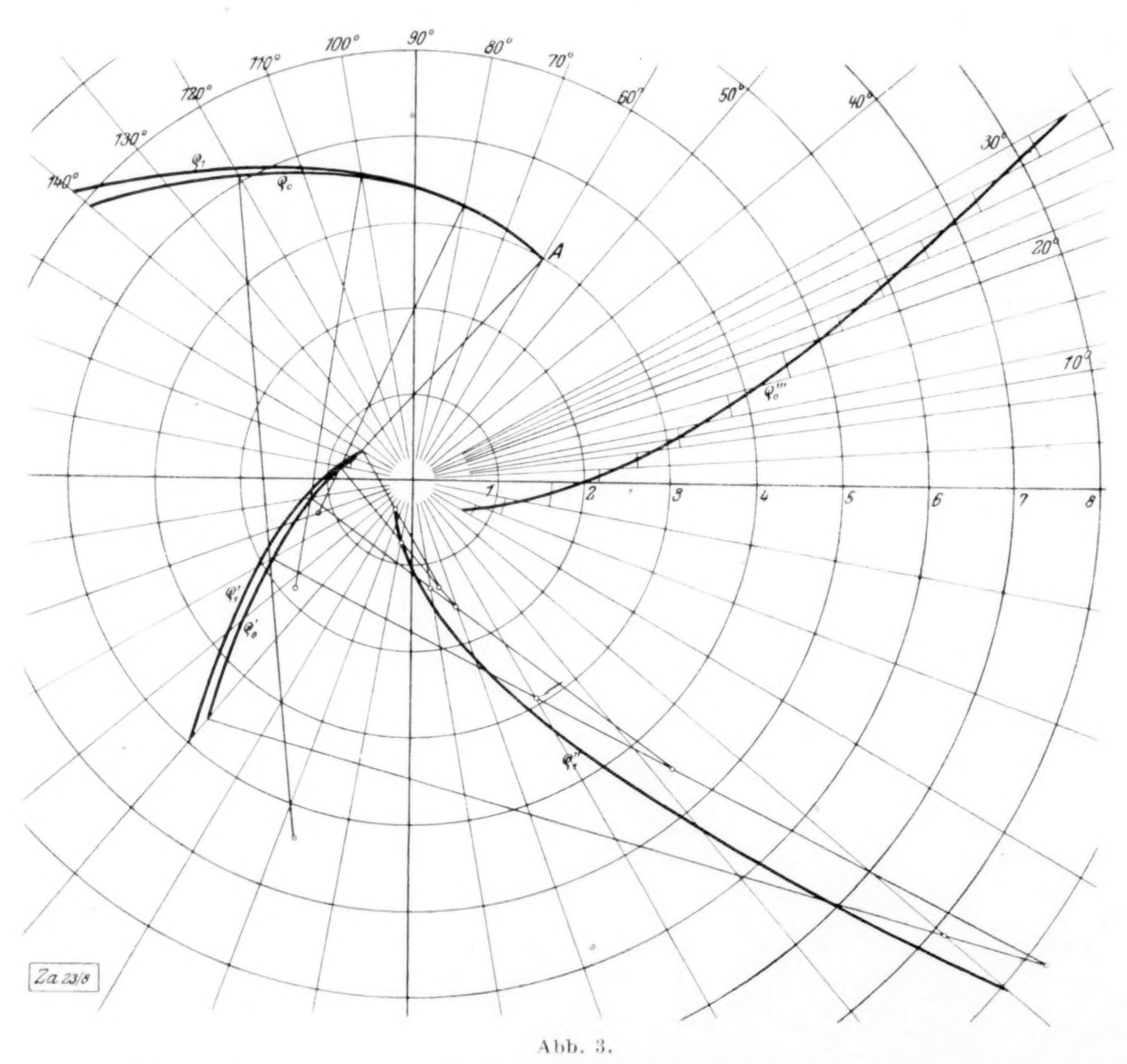


Abb. 3.

Die »mittleren Bögen« greift man natürlich nur mit dem Zirkel ab. Nur zur Veranschaulichung sind sie in die ϱ'''-Kurve — die nur bis 120^0 eingezeichnet ist — eingetragen.

[1]) R. Neuendorff, a. a. O., S. 136.

[2]) Als einfaches Beispiel habe ich durchgezeichnet (s. Abb. 3):

$$\frac{d^3\,\varrho}{d\,\varphi^3} + 3\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,\frac{d^2\,\varrho}{d\,\varphi^2} - 2\,\frac{d\,\varrho}{d\,\varphi} = 0$$

mit den Anfangswerten $\varphi_0 = 60^0$, $\varrho_0 = 3\,\mathrm{cm}$, $\varrho_0' = {}^2/_3$, $\varrho_0'' = {}^2/_9\sqrt{3}$ und dem Integral: $\varrho = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + 3 - {}^1/_3\sqrt{3}$.

Die Zeichnung auf vorgedrucktem Polarkoordinatenpapier und mit doppeltem Längenmaßstab ergab beim Fortschreiten um je 10^0 (ohne Verbesserung nach 3) bei 120^0 den Wert $\varrho = 4{,}15$ cm (berechnet 4,1547 cm). Dagegen wurde in Abb. 3 beim Fortschreiten um je 20^0 bei 140^0 zuerst $\varrho = 4{,}95$ cm und nach der ersten Verbesserung $\varrho = 5{,}18$ cm (berechnet $\varrho = 5{,}17$ cm) gefunden. Eine zweite Verbesserung ergab sich nicht.

Polynomialvektoranalyse und Kugelfunktionen.

Von **EMIL WAELSCH** in Brünn.

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck, zu zeigen, wie eine Analyse des dreidimensionalen Vektorraumes mit den einfachsten Mitteln der Algebra gewonnen werden kann durch Abbildung der Vektoren auf Polynome zweiten Grades einer Veränderlichen und durch Einführung der gewissen Polynomen höheren Grades zugeordneten »Zwei- und Vielbeine« und ihrer Verknüpfungen[1]).

Die zunächst folgende Einleitung versucht eine kurze Darstellung des Verfahrens und der einzuführenden Begriffe und erörtert die Anwendungsmöglichkeit der Analyse.

1. Ein »Zweibein« ist das geometrische Gebilde, welches aus zwei, ein Vielbein das Gebilde, welches aus mehreren von einem Punkt ausgehenden Vektoren des dreidimensionalen Raumes besteht[2]). Daß dieses einfache, durch Nebeneinanderstellung mehrerer Vektoren entstehende Gebilde nicht schon von Beginn in die Vektorgeometrie als Grundgebilde eingeführt worden ist, scheint daran zu liegen, daß wohl die Verknüpfungen von Vektoren zu skalaren und vektorischen Produkten als bekannt vorlagen, nicht aber solche Produkte zweier Vielbeine.

Doch tritt bei Maxwell (Elektr. u. Magnet. Bd. I, S. 194, 195) das Vielbein implizite auf in seiner Definition der Kugelfunktion α-ter[3]) Ordnung, welche eine Form der x, y, z ist, die der Differentialgleichung $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = 0$ genügt. Diese Funktion ist nämlich nach Maxwell gleich:

$$c\, r^{2\alpha+1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{\partial}{\partial h_3} \cdots \frac{\partial}{\partial h_\alpha} \frac{1}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

wobei die h von dem Bezugspunkt O gegen die »Pole« der Funktion gerichtete Achsen sind, deren Richtungen eben die der α Teilvektoren eines Vielbeins geben.

2. Es soll nun gleich hier die einfache Methode angegeben werden, welche gestattet, das skalare und das vektorische Produkt zweier Vektoren in einheitlicher Weise abzuleiten durch Zuweisung eines Vektors zu einem Polynom zweiten Grades einer Veränderlichen und durch einfache Differentiationsprozesse, die an den Polynomen der beiden Vektoren vorgenommen werden.

Das Polynom, welches dem Vektor $\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}$ zugewiesen wird, ist das Trinom zweiten Grades:

$$\mathfrak{x}_2 = a_0 v^2 + 2 a_1 v + a_2 \qquad \text{(a)}$$

mit der Veränderlichen v und den Parametern a_0, a_1, a_2, und zwar soll diese Zuordnung so erfolgen, daß das Quadrat der Länge des Vektors gleich wird der Diskriminante des Trinoms, daß demnach:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a_0 a_2 - a_1^2.$$

Da $x^2 + y^2 + z^2 = (x + i y)(x - i y) - (i z)^2$ ist, kann dies dadurch bewirkt werden, daß gesetzt wird:

$$x + i y = a_0, \quad i z = a_1, \quad x - i y = a_2 \qquad \text{(b)},$$

so daß das Trinom $\mathfrak{x}_2$, welches dem Vektor zuzuweisen ist, wird zu:

$$\mathfrak{x}_2 = (x + i y) v^2 + 2 i z v + (x - i y) \qquad \text{(c)}.$$

Die Differentiationsprozesse, welche nun an dem Trinom $\mathfrak{x}_2$ des Vektors $\mathfrak{x}$ und an dem Trinom $\mathfrak{y}_2 = b_0 v^2 + 2 b_1 v + b_2$ eines zweiten Vektors $\mathfrak{y} = x'\,\mathfrak{i} + y'\,\mathfrak{j} + z'\,\mathfrak{k}$ angewendet werden sollen, sind:

$$\mathfrak{x}_1 = {}^1/_2 \frac{d\,\mathfrak{x}_2}{d v} = a_0 v + a_1, \quad \mathfrak{x}_0 = \frac{d\,\mathfrak{x}_1}{d v} = a_0; \quad \mathfrak{y}_1 = {}^1/_2 \frac{d\,\mathfrak{y}_2}{d v} = b_0 v + b_1, \quad \mathfrak{y}_0 = \frac{d\,\mathfrak{y}_1}{d v} = b_0 \qquad \text{(d)}.$$

---

1) Die vom Verfasser behandelte »Binäranalyse« des drei- und des vierdimensionalen Vektorraumes setzt die Begriffsbestimmungen und Beziehungen der Theorie der binären Formen, zumal in der von Aronhold und Clebsch gegebenen symbolischen Richtung, zum Teil als bekannt voraus. Die folgende Arbeit hat den Zweck, ohne diese Hilfsmittel, insbesondere ohne Symbolik, die durch die Binäranalyse sich ergebenden Resultate zum Teil zu begründen und darzustellen. Die Theorie der binären Formen läßt sich bekanntlich umgestalten in eine Theorie der Polynome einer Veränderlichen, unter Verwendung der sogenannten »einseitigen Derivierten«; in analoger Weise läßt sich die Binäranalyse umsetzen in die folgende »Polynomialvektoranalyse«.

2) Alle Vektoren des Folgenden gehen vom Bezugspunkt O aus und sind, wenn nicht das Gegenteil gesagt wird, reell.

3) Positive ganze Zahlen werden im folgenden mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Dann ergibt sich:

$$\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2 = (a_1\,b_0 - a_0\,b_1)\,v^2 + (a_2\,b_0 - a_0\,b_2)\,v + (a_2\,b_1 - a_1\,b_2)$$
$$= (x'' + i\,y'')\,v^2 + 2\,i\,z''\,v + (x'' - i\,y'') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (e),$$

wobei: $x'' = y\,z' - z\,y'$, $y'' = z\,x' - x\,z'$, $z'' = x\,y' - y\,x'$, so daß das durch die Differentiationsprozesse gewonnene Trinom $\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_2$ zum vektorischen Produkt $\mathfrak{x} \times \mathfrak{y}$ gehört.

Ferner ist, wie eine kurze Rechnung zeigt, der durch dieselben Differentiationsprozesse gewonnene Ausdruck:

$$\mathfrak{x}_2\,\mathfrak{y}_0 - 2\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_0\,\mathfrak{y}_2 = a_2\,b_0 - 2\,a_1\,b_1 + a_0\,b_2 = 2\,(x\,x' + y\,y' + z\,z') = 2\,\mathfrak{x}\,.\,\mathfrak{y} \quad (f),$$

also gleich dem doppelten skalaren Produkt der beiden Vektoren.

3. Einem α-bein kann nun das Produkt der Trinome zugeordnet werden, die nach Art. 2 zu den Teilvektoren des α-beins gehören, also ein Polynom $2\,\alpha$-ten Grades:

$$a_0\,v^{2\alpha} + a_1\,v^{2\alpha-1} + \cdots + a_{2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (g).$$

Es zeigt sich, daß die Koeffizienten dieses Polynoms die Eigenschaft

$$a_{2\alpha-\sigma} = (-1)^\sigma\,\bar{a}_\sigma \;\; (\bar{a} \text{ konj. imag. zu } a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (h)$$

haben, und daß umgekehrt jedes Polynom $2\,\alpha$-ten Grades, welches diese Eigenschaft besitzt, in α Trinome (c) von Vektoren zerlegbar ist, ihm also das α bein zugeordnet werden kann, welches diese Vektoren zu Teilvektoren hat.

Hierauf werden die Differentiationsprozesse (d) leicht verallgemeinert und in gewissen Verbindungen an den Polynomen zweier gegebener Vielbeine angewendet. Hierdurch ergibt sich eine Reihe neuer Polynome[1]), welche, wie gezeigt werden kann, die Eigenschaft (h) besitzen. Demnach sind ihnen Vielbeine zugeordnet, welche als Produkte oder Verknüpfungen der beiden gegebenen Vielbeine angesehen und »Bünde« derselben genannt werden.

4. Die Vielbeine und ihre Bünde erweisen sich als fundamental auch in der Dyaden-, Triaden-, ... , Polyaden- (Tensoren-)geometrie und -rechnung, da jede solche vektorische Größe, der ein in jeder von mehreren Veränderlichen quadratisches Polynom zugeordnet wird, in einfacher bei Drehstreckungen invarianter Weise durch Vielbeine bestimmt werden kann. Ferner darum, da aus den Vielbeinen einer und mehrerer vektorischer Größen sich durch Bildung von Bünden und durch die elementaren ganzen algebraischen Operationen alle die ganzen vektorischen Größen bilden lassen, welche gegenüber Drehstreckungen zu den gegebenen Größen invariant sind.

5. In der folgenden Arbeit werden entsprechend dem Vorstehenden in I zunächst ohne Rücksicht auf die Vektorrechnung Polynome und ihre Verknüpfungen durch Bünde besprochen. Ferner werden Relationen zwischen solchen Bünden behandelt, insbesondere zwischen Bünden von Polynomen zweiter Ordnung, wobei für den Kenner der Vektorrechnung schon die Beziehungen zu den Relationen zwischen Vektoren hervortreten. In II treten dann Vektoren und Vielbeine ein, und in III wird als besonders einfache Anwendung die rationale Darstellung der obigen Kugelfunktion α ter Ordnung der Veränderlichen x, y, z durch ein Vielbein gegeben[2]) und die Entwicklung eines Produktes zweier Kugelfunktionen nach solchen.

I. Rechnung mit Bünden von Polynomen.

1. Derivate und Bünde. Aus dem Polynom $p_\alpha \equiv p_\alpha(v)$ von der Ordnung α in der Veränderlichen v werden dessen »**Derivate**« p_σ rekurrierend gebildet, vermöge der Gleichungen:

$$p_\alpha,\; p_{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{d\,p_\alpha}{d\,v},\; p_{\alpha-2} = \frac{1}{\alpha-1}\,\frac{d\,p_{\alpha-1}}{d\,v},\; \ldots,\; p_0 = \frac{d\,p_1}{d\,v} \quad . \; . \; . \; . \quad (1).[3])$$

---

[1]) Die den »Ueberschiebungen« zweier binären Formen entsprechen (jedoch bei ungeraden Ueberschiebungen mit entgegengesetztem Vorzeichen).

[2]) Vergl. E. Waelsch, »Fonct. sphér. et leurs multipèdes«, Compt. rend. t. 144 (1907) und »Kugelfunkt., ihre binär. Formen u. Vielbeine«, Wien, Monatshefte f. Math. u. Phys., Bd. 20 (1909), wo diese Entwicklung mit Hilfe der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung doppeltbinärer Formen und eines Satzes von Gordan und Berzolari über Ueberschiebungen von Potenzen einer quadratischen Form abgeleitet worden ist.

[3]) Diese Definition der Derivate weicht leicht von der üblichen der einseitigen Derivierten ab, nach der das obige p_σ mit $p_{\alpha-\sigma}$ bezeichnet wird. Diese Abänderung gibt aber doch eine stärkere Mechanisierung bei der Berechnung der Derivate der im folgenden einzuführenden »Verbände«.

Wird $p_\alpha = a_0\,v^\alpha + \alpha_1\,a_1\,v^{\alpha-1} + \alpha_2\,a_2\,v^{\alpha-2} + \ldots$ gesetzt, wobei der Binominalkoeffizient $\binom{\lambda}{\mu}$ mit λ_μ bezeichnet sei, so ist: $p_\sigma = a_0\,v^\sigma + \sigma_1\,a_1\,v^{\sigma-1} + \sigma_2\,a_2\,v^{\sigma-2} + \ldots$ und $\{p_\sigma\}_{v=0} = a_\sigma$.

Diese Derivate und die des Polynoms $q_\beta = q_\beta(v)$ können in gewisser Weise zu einem mit $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta$ zu bezeichnenden Polynom (gelesen: »p_α in kappa q_β«) verbunden werden, nämlich zu:[1]):

$$p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta = (-1)^\sigma \varkappa_\sigma \, p_{\alpha-\sigma} \, q_{\beta-\varkappa+\sigma} \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

wobei die sogenannte »Bindungszahl« $\varkappa$ höchstens gleich ist der kleineren der Zahlen α, β. Dieses Polynom heiße »$\varkappa$-ter Bund« oder »$\varkappa$bund« der Polynome p_α, q_β.

Beispiele: Es ist: $p_\alpha \underset{0}{:} q_\beta = p_\alpha \, q_\beta$.

Ferner: In Art. 2 der Einl. sind die Derivate der Trinome $\mathfrak{x}_2$ und $\mathfrak{y}_2$ bestimmt worden und aus diesen in (e) und (f) ihr 1- und 2-bund als:

$$\mathfrak{x}_2 \underset{1}{:} \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_1 - \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_2 = (a_1 b_0 - a_1 b_0)\, v^2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2)\, v + (a_2 b_1 - a_1 b_2) \quad . \quad (3),$$

$$\mathfrak{x}_2 \underset{2}{:} \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_0 - 2\, \mathfrak{x}_1 \mathfrak{y}_1 + \mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_2 = a_2 b_0 - 2\, a_1 b_1 + a_0 b_2 \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Da der $\varkappa$bund linear ist in den Parametern der Polynome p_α, q_β und aus ihnen durch Differentiation hervorgeht, ist die Verknüpfung durch Bünde distributiv in bezug auf die Addition von Polynomen gleicher Ordnung, d. h. es gilt:

$$(p_\alpha + p'_\alpha) \underset{\varkappa}{:} q_\beta = p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta + p'_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta; \quad p_\alpha \underset{\varkappa}{:} (q_\beta + q'_\beta) = p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta + p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q'_\beta \quad . \quad (5).$$

Ferner ist sie assoziativ für die Multiplikation mit einer Konstanten c, d. h. es ist:

$$c\,(p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta) = (c p_\alpha) \underset{\varkappa}{:} q_\beta = p_\alpha \cdot (c q_\beta) \quad \ldots \ldots \quad (6).$$

Es gelten weiter die folgenden Sätze:

Satz 1: $$q_\beta \underset{\varkappa}{:} p_\alpha = (-1)^\varkappa \, p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Denn es ist nach (2): $q_\beta \underset{\varkappa}{:} p_\alpha = (-1)^\sigma \varkappa_\sigma \, q_{\beta-\sigma} \, p_{\alpha-\varkappa+\sigma} = (2) = (-1)^\varkappa \, p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta$.

Hieraus folgt, da nach Satz 1: $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} p_\alpha = (-1)^\varkappa \, p_\alpha \underset{\varkappa}{:} p_\alpha$:

Satz 2: Es ist $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} p_\alpha = 0$, wenn $\varkappa$ eine ungerade Zahl ist . . . . . . (8).

Satz 3: Der $\varkappa$bund $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta$ der Polynome p_α und q_β ist ein Polynom der Ordnung $\alpha + \beta - 2\varkappa$. Denn es läßt sich nach einem Hilfssatze das Polynom p_α darstellen als Summe von $\alpha + 1$ Produkten $c_\sigma (v - a_{(\sigma)})^\alpha$, wo die Zahlen $a_{(\sigma)}$ von einander verschieden sind[2]); also ist, wenn $v - a = a_v$ gesetzt wird: $p_\alpha = c_\sigma a^\alpha_{(\sigma)\,v}$. Ebenso ist q_β darstellbar als Summe von $\beta + 1$ Produkten: $c'_\tau b^\beta_{(\tau)\,v}$. Unter Anwendung von (5), (6) ergibt sich $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta = c_\sigma c'_\tau \, a^\alpha_{(\sigma)\,v} \underset{\varkappa}{:} b^\beta_{(\tau)\,v}$, worin jedes Glied rechts von der Ordnung $\alpha + \beta - 2\varkappa$ ist[3]).

2. Vollbünde. Man kann annehmen, die Ordnung $(\alpha - \varkappa) + (\beta - \varkappa)$ des $\varkappa$-bunds $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta$ entstünde dadurch, daß bei der Bildung des $\varkappa$-bunds die Ordnungen α, β der Polynome p_α und q_β um je $\varkappa$ ihrer Einheiten herabgesetzt würden, daß demnach im besonderen, wenn $\varkappa = \alpha$ (wobei $\alpha < \beta$) die Ordnung α von p_α in dem $\varkappa$-bund ganz ausfällt. Deswegen kann $p_\alpha \underset{\alpha}{:} q_\beta$ auch »Vollbund der Polynome p_α, q_β bez. p_α« genannt werden, und analog $p_\alpha \underset{\beta}{:} q_\beta$ (bei $\alpha > \beta$) auch »Vollbund der Polynome p_α, q_β bez q_β«.

Es soll nun in der Bezeichnung eines solchen Vollbunds die Bindungszahl α oder β weggelassen werden, so daß beide Vollbünde $p_\alpha \underset{\alpha}{:} q_\beta$ und $p_\alpha \underset{\beta}{:} q_\beta$ bezeichnet werden mit $p_\alpha \cdot q_\beta$. Hierbei kann eine Zweideutigkeit nicht eintreten, da ja bekannt ist, welche der beiden Ordnungen α, β die kleinere ist.

---

[1]) Hier wie im folgenden wird rechts über den gegenüber links neu hinzutretenden Index, hier σ, von $\sigma = 0$ an, summiert (in Anwendung einer bekannten abkürzenden Schreibweise Einsteins).

[2]) Denn werden in dem Ansatz $p_\alpha = c_\sigma \, (v - a_{(\sigma)})^\alpha$ die Koeffizienten der beiderseitigen gleich hohen Potenzen von v einander gleich gesetzt, so ergeben sich $\alpha + 1$ lineare Gleichungen für die c_σ, deren Determinante die Kolonnen 1, $a_{(\sigma)}$, $a^2_{(\sigma)}$, $a^3_{(\sigma)}$, . . ., $a^\alpha_{(\sigma)}$ besitzt, also wesentlich gleich ist dem Produkte der Differenzen der $a_{(\sigma)}$, und die nicht verschwindet, weil die $a_{(\sigma)}$ als verschieden angenommen wurden.

Dieser Hilfssatz ersetzt die Vorteile der Symbolik zum Teil.

[3]) Denn es ist, wenn $p_\alpha = a^\alpha_v$ das Derivat $p_\sigma = a^\sigma_v$, und nach (2):

$$a^\alpha_v \underset{\varkappa}{:} b^\beta_v = (-1)^\sigma \varkappa_\sigma \, a^{\alpha-\sigma}_v \, b^{\beta-\varkappa+\sigma}_v = a^{\alpha-\varkappa}_v \, b^{\beta-\varkappa}_v \left[(-1)^\sigma \varkappa_\sigma a^{\varkappa-\sigma}_v \, b^\sigma_v = (b-a)^\varkappa = \right| a^\varkappa_b .$$

Im besonderen ist: $a^\alpha_v \cdot b^\alpha_v = a^\alpha_b$.

Ist nun $\alpha = \beta = \varkappa$, so ist der Vollbund $p_\alpha \underset{\alpha}{:} q_\alpha$ sowohl bez. p_α als bez. q_α genommen, und eine Konstante. Er wird nach dem soeben festgesetzten mit $p_\alpha \cdot q_\alpha$ bezeichnet, und soll: »Vollbund der Polynome gleicher Ordnung p_α, q_α« schlechtweg genannt werden.

Der folgende Satz enthält ein grundlegendes Assoziationsgesetz für die Bildung von Vollbünden:

Satz 4: Es ist, wenn $\alpha > \beta + \gamma$

$$(p_\alpha \cdot q_\beta) \cdot r_\gamma = p_\alpha \cdot (q_\beta \, r_\gamma) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9);$$

denn es ist nach dem schon bei Satz 1 verwendeten Hilfssatz:

$$(p_\alpha \cdot q_\beta) \cdot r_\gamma = (c_\sigma \, a^\alpha_{(\sigma)\,v}) \cdot q_\beta \cdot r_\gamma = (5, 6) = c_\sigma \, a^\alpha_{(\sigma)\,v} \cdot q_\beta \cdot r_\gamma \, .$$

Nun ist $a^\alpha_v \cdot q_\beta = (-1)^{\alpha-\beta} q_\beta \cdot a^\alpha_v =$ [1]$) = (-1)^\beta \, a^{\alpha-\beta}_v \, q_\beta(a)$, also:

$$(a^\alpha_v \cdot q_\beta) \cdot r_\gamma = (-1)^\beta \, q_\beta(a) \, a^{\alpha-\beta}_v \cdot r_\gamma = {}^{1}) = (-1)^{\beta+\gamma} \, q_\beta(a) \, r_\gamma(a) \, a^{\alpha-\beta-\gamma}_v .$$

Andererseits ist aber: $p_\alpha \cdot (q_\beta \, r_\gamma) = (c_\sigma \, a^\alpha_{(\sigma)\,v}) \cdot (q_\beta \, r_\gamma) = c_\sigma \, a^\alpha_{(\sigma)\,v} \cdot (q_\beta \, r_\gamma)$ und nach[1]) und (7) ferner: $a^\alpha_v \cdot (q_\beta \, r_\gamma) = (-1)^{\beta+\gamma} \, q_\beta(a) \, r_\gamma(a) \, a^{\alpha-\beta-\gamma}_v$.

In dem nächsten Satz wird gezeigt, wie sich der $\varkappa$bund, der nicht Vollbund ist, auf die Bestimmung von Vollbünden zurückführen läßt:

Satz 5: Es ist, $\alpha - \varkappa = \alpha'$, $\beta - \varkappa = \beta'$, $v - u = u_v$ gesetzt:

$$p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta = \{(p_\alpha \cdot u^{\alpha'}_v) \cdot (q_\beta \cdot u^{\beta'}_v)\}_{u=v} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

Zunächst werden sonach die Vollbünde $p_\alpha \cdot u^{\alpha'}_v$, $q_\beta \cdot u^{\beta'}_v$ von p_α und q_β bez. $u^{\alpha'}_v$ bezw. $u^{\beta'}_v$ gebildet, welche Polynome der Ordnung $\varkappa$ sind, und hierauf ihr Vollbund, der ein Polynom in u ist, und aus dem sich $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta$ ergibt, wenn $u = v$ gesetzt wird.

Zum Beweise des Satzes ist wieder nach dem obigen Hilfssatz und (5), (6):

$$(p_\alpha \cdot u^{\alpha'}_v) \cdot (q_\beta \cdot u^{\beta'}_v) = (c_\sigma \, a^\alpha_{(\sigma)\,v} \cdot u^{\alpha'}_v) \cdot (c_\tau' \, b^\beta_{(\tau)\,v} \cdot u^{\beta'}_v) = c_\sigma \, c_\tau' \, (a_{(\sigma)\,a} \cdot u^{\alpha'}_v) \cdot (b^\beta_{(\tau)\,v} \cdot u^{\beta'}_v).$$

Ferner ist vermöge[1]) und (7): $a^\alpha_v \cdot u^{\alpha'}_v = a^\varkappa_v \, a^{\alpha'}_u$ und $b^\beta_v \cdot u^{\beta'}_v = b^\varkappa_v \, b^{\beta'}_u$,

also ist: $(a^\alpha_v \cdot u^{\alpha'}_v) \cdot (b^\beta_v \cdot u^{\beta'}_v) = (6) = a^{\alpha'}_u \, b^{\beta'}_u \, a^\varkappa_v \cdot b^\varkappa_v =$ [1]$) = a^\varkappa_b \, a^{\alpha'}_v \, b^{\beta'}_v$.

Andererseits ist: $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta = (c_\sigma \, a^\alpha_{(\sigma)\,v}) \underset{\varkappa}{:} (c_\tau' \, b^\beta_{(\tau)\,v}) = c_\sigma \, c_\sigma' \, a^\alpha_{(\sigma)\,v} \underset{\varkappa}{:} b^\beta_{(\tau)\,v}$, und nach [4]) Art. 1: $a^\alpha_v \underset{\varkappa}{:} b^\beta_v = a^\varkappa_b \, a^{\alpha'}_v \, b^{\beta'}_v$.

3. „Verband" mehrerer Polynome heißt ein durch Bildung von Bünden aus ihnen hergestelltes Polynom. Z. B.: $(p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta) \underset{\lambda}{:} r_\gamma$ [2]), $(p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta) \underset{\mu}{:} (r_\gamma \underset{\lambda}{:} s_\delta)$.

Zwischen Verbänden bestehen Relationen, von welchen einfachste schon in Satz 1 und 4 enthalten sind.

Zur Herstellung solcher Relationen dienen die folgenden Bemerkungen:

Bei »Derivation« der Gleichung (2) ergibt sich, wenn noch $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta = r_{\gamma = \alpha+\beta-2\varkappa}$ gesetzt wird, links $\gamma r_{\gamma-1}$; rechts wird jedes der auftretenden Derivate p_σ, q_τ ersetzt durch $\sigma p_{\sigma-1}$ bezw. $\tau q_{\tau-1}$, worauf die erhaltenen Resultate addiert werden. Hierdurch erscheint $r_{\gamma-1}$ bestimmt. Aus $r_{\gamma-1}$ ergibt sich ebenso durch Derivation $\gamma r_{\gamma-2}$ usw. Z. B. hat der Bund $p_2 \underset{1}{:} q_2 = r_2$ die Derivate:

$$r_2 = p_2 \, q_1 - p_1 \, q_2, \quad 2 r_1 = p_2 \, q_0 - p_0 \, q_2, \quad r_0 = p_1 \, q_0 - p_0 \, q_1 \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

---

[1]) Denn es ist zunächst: $p_\alpha \cdot a^\alpha_v = (-1)^\sigma \, a_\sigma \, p_{\alpha-\sigma} \, a^\sigma_v = (1) = \frac{1}{\sigma!} \, v^\sigma_\alpha \frac{d^\sigma p_\alpha}{d v^\sigma} =$ nach Taylor $= p_\alpha$ (a).

Hieraus folgt die oben zu verwendende Formel:

$$q_\beta \cdot a^{\alpha \geqq \beta}_v = (-1)^\sigma \, \beta_\sigma \, q_{\beta-\sigma} \, a^{\alpha-\beta+\sigma}_v = a^{\alpha-\beta}_v \left((-1)^\sigma \, \beta_\sigma \, q_{\beta-\sigma} \, a^\sigma_v\right) = a^{\alpha-\beta}_v \, q_\beta(\mathrm{a}).$$

Daher auch: $a^\alpha_v \cdot b^\alpha_v = a^\alpha_b$, wie in [4]) Art. 1.

[2]) Der durch »primäre« Assoziation aus p_α, q_β, $r_\gamma \ldots z_\zeta$ gewonnene Verband: $(\ldots((p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta) \underset{\lambda}{:} r_\gamma) \ldots \underset{\omega}{:} z_\zeta)$ soll kürzer mit $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta \underset{\lambda}{:} r_\gamma \ldots \underset{\omega}{:} z_\zeta$ bezeichnet werden, also $(p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta) \underset{\lambda}{:} r_\gamma$ mit $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta \underset{\lambda}{:} r_\gamma$.

Auf diese Weise können die Derivate eines Verbandes ausgedrückt werden durch die Derivate der Polynome, aus welchen er hergestellt ist, und dies kann benutzt werden, um die gesuchten Relationen zu finden. Als Beispiele sollen einige Relationen zwischen Verbänden von Trinomen [1]) abgeleitet werden. Nach (11) ist:

$$(\mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{b})\underset{1}{;}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{b}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2)\,\mathfrak{c}_1 - {}^1/_2\,(\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_2)\,\mathfrak{c}_2$$
$$= {}^1/_2\,(\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_0 - 2\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}_0\mathfrak{c}_2)\,\mathfrak{b}_2 - {}^1/_2\,(\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_0 - 2\,\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{b}_0\mathfrak{c}_2)\,\mathfrak{a}_2$$

Daher ist: $$\mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{b}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{c} = {}^1/_2\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{b} - {}^1/_2\,\mathfrak{b}_2\mathfrak{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12).$$

Ferner ist: $\mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2)\,\mathfrak{c}_0 - (\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_2)\,\mathfrak{c}_1 + (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_1)\,\mathfrak{c}_2 = |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0|$, wo $|\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0|$ die Determinante mit den Z^ilen $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0$; $\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_0$; $\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_0$ ist. Daher ist:

$$(\mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})^2 = |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}^0|^2 = {}^1/_2\,|\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0|\,|\mathfrak{a}_0, -2\,\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2| = {}^1/_2 \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_\mathfrak{a}, & \mathfrak{a}_\mathfrak{b}, & \mathfrak{a}_\mathfrak{c} \\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}, & \mathfrak{b}_\mathfrak{b}, & \mathfrak{b}_\mathfrak{c} \\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}, & \mathfrak{c}_\mathfrak{b}, & \mathfrak{c}_\mathfrak{c} \end{vmatrix} \quad . \quad (13).$$

Die Derivate von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ sind: $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2$, ${}^1/_2\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2 + {}^1/_2\,\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$, ${}^1/_6\,(\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_2 + 4\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_0)$, ${}^1/_2\,\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_1 + {}^1/_2\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}_0$; daher:

$$\mathfrak{a}\,\underset{0}{;}\,\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c} = {}^1/_2\,\mathfrak{a}_\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} + {}^1/_2\,\mathfrak{b}_\mathfrak{c}\,\mathfrak{a} - {}^1/_3\,\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Durch Vollbund mit $\mathfrak{d}$ hieraus:

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\cdot\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{d} = (9) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\cdot(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = {}^1/_2\,\mathfrak{a}_\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}_\mathfrak{d} + {}^1/_2\,\mathfrak{a}_\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}_\mathfrak{c} - {}^1/_3\,\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}_\mathfrak{d} \quad . \; . \quad (15).$$

Aus den Derivaten von $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}$ folgt:

$$4\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\underset{1}{;}\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{b}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{a}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \quad . \; . \; . \; . \quad (16),$$
$$4\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\underset{2}{;}\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}) = \mathfrak{b}_\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{a}_\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{a}_\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{b}_\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{d} - {}^4/_3\,\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} - {}^4/_3\,\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d} \quad . \quad (17).$$

II. Vektoren und Vielbeine und ihre Bünde.

4. Vektorprodukte. Nach Art. 1 der Einl. können das Trinom $\mathfrak{r}_2 = a_0 v^2 + 2\,a_1 v + a_2$ und der Vektor $\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}$ einander zugeordnet werden, indem gesetzt wird:

$$a_0 = x + i\,y,\quad a_1 = i\,z,\quad a_2 = x - i\,y;\quad x = {}^1/_2(a_0 + a_2),\quad y = {}^1/_2\,i\,(a_2 - a_0),\quad z = -i\,x \quad (18),$$

so daß:

$$\mathfrak{r}_2 = (x + i\,y)\,v^2 + 2\,i\,z\,v + (x\,i\,y);\quad \mathfrak{r} = {}^1/_2\,(a_0 + a_2)\,\mathfrak{i} + {}^1/_2\,i\,(a_2 - a_0)\,\mathfrak{j} - i\,a_1\,\mathfrak{k} \quad (19)$$

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ besitzen dann die Trinome:

$$\mathfrak{i}_2 = v^2 + 1,\quad \mathfrak{j}_2 = i\,(v^2 - 1),\quad \mathfrak{k}_2 = 2\,i\,v \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Für das Trinom eines reellen Vektors gilt:

$$a_2 = \bar{a}_0,\quad a_1 = -\bar{a}_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21);$$

es soll »Realtrinom« heißen.

Nach (*e*), (*f*) kann gesagt werden: Der Voll- oder 2bund $\mathfrak{r}\,\underset{2}{;}\,\mathfrak{y} = \mathfrak{r}\cdot\mathfrak{y} = \mathfrak{r}_\mathfrak{y}$ zweier Vektoren $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{y}$ ist das doppelte skalare Produkt, und ihr 1bund: $\mathfrak{r}\,\underset{1}{;}\,\mathfrak{y}$ ist ihr vektorisches Produkt. Hiermit sind dann diese beiden Produkte von einem gemeinsamen Gesichtspunkt aus definiert.

Ist das Trinom $\mathfrak{r}_2 = a_0\,(v - a)^2$, hat es also die Doppelwurzel a, so verschwindet seine Diskriminante; sein Vektor ist dann ein »Nullvektor«, d. h. ein Vektor von der Länge Null, oder der auf dem »Minimalkegel« mit dem Scheitel O liegt. Ein Nullvektor ist demnach auch gegeben durch ein Trinom l^2, welches das Quadrat eines linearen Binoms $l = e_0\,v + e_1$ ist.

Das Trinom eines Nichtnullvektors $\mathfrak{r}$ läßt sich zerlegen wie folgt:

$$\mathfrak{r}_2 = a_0\,(v - a)\,(v - b) = a_0\,a_v\,b_v,\ \text{mit}\ a \neq b.$$

Die Zahlen a, b sollen als »Wurzeln« des Vektors bezeichnet werden, die Differenzen a_v, b_v als seine »Wurzelfaktoren«, und die Nullvektoren mit den Trinomen a_v^2, b_v^2 als seine »Wurzelvektoren«.

Die Wurzeln des reellen Vektors mit den Koordinaten x, y, z sind, wie man leicht berechnet, wenn noch $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$a = (z + r)/i\,(x + i\,y),\quad b = (z - r)/i(x + i\,y) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Das Trinom eines reellen Vektors läßt sich daher in die Gestalt setzen:

$$(x + i\,y)\,(v - a)\,(v + 1/\bar{a}) = i\,k\,(v - a)\,(\bar{a}\,v + 1) \quad . \; . \; . \; . \quad (23),$$

wo k eine reelle Zahl ist.

[1]) Es soll im folgenden das Trinom $\mathfrak{r}_2$ mit $\mathfrak{r}$ und der Vollbund $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{r}_\mathfrak{y}$ bezeichnet werden

5. Vielbeine. Durch α reelle Richtungen und eine positive Zahl ist ein »αbein« oder ein »Vielbein αter Ordnung«, bezeichnet mit $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, gegeben, bestehend aus α reellen Vektoren, welche je diese Richtungen haben und Beträge besitzen, deren Produkt die obige positive Zahl ist, die »Betrag« des αbeins genannt und mit $|\mathfrak{a}^{(\alpha)}|$ bezeichnet sei. Dieser Betrag und die α Richtungen geben die $2\alpha+1$ Konstanten des α-beins.

Ein Vektor ist ein 1bein, ein Skalar ein 0bein.

Sind $\mathfrak{e}_{(1)}, \mathfrak{e}_{(2)}, \ldots, \mathfrak{e}_{(\alpha)}$ die Einheitsvektoren der α Richtungen und auch die Trinome dieser Vektoren, so ist $|\mathfrak{a}^{(\alpha)}|\,\mathfrak{e}_{(1)}\,\mathfrak{e}_{(2)}\ldots\mathfrak{e}_{(\alpha)}$ das Polynom 2α-ter Ordnung des αbeins. Da sich dieses Produkt nicht ändert, wenn eine gerade Anzahl der α Richtungen sich umkehrt, so bleibe auch bei dieser Aenderung das αbein dasselbe.

Wird $|\mathfrak{a}^{(\alpha)}| = |\mathfrak{a}_{(1)}|\,|\mathfrak{a}_{(2)}|\ldots|\mathfrak{a}_{(\alpha)}|$ gesetzt, so kann das αbein auch angesehen werden als das Produkt seiner Teilvektoren $\mathfrak{a}_{(\rho)} = |\mathfrak{a}_{(\rho)}|\,\mathfrak{e}_{(\rho)}$, die im allgemeinen nicht dieselben Beträge $|\mathfrak{a}_{(\rho)}|$ zu besitzen brauchen; das Produkt dieser Beträge ist aber gleich dem Betrag $|\mathfrak{a}^{(\alpha)}|$ des αbeins. Im besonderen kann $|\mathfrak{a}_{(\rho)}| = |\mathfrak{a}^{(\alpha)}|^{1/\alpha}$ gesetzt werden, wo dann die Teilvektoren des αbeins durch die Vektoren derselben Länge: $|\mathfrak{a}^{(\alpha)}|^{1/\alpha}\,\mathfrak{e}_{(\rho)}$ ersetzt sind.

Nach dem Vorstehenden sind zwei αbeine $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$ als gleich anzusehen, wenn das Produkt der Beträge der Teilvektoren von $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ gleich ist dem Produkt der Teilvektoren von $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$, und wenn eine gerade Anzahl der Richtungen von $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ entgegengesetzt ist zu Richtungen von $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$.

Das αbein, welches α-mal den Vektor $\mathfrak{r}$ enthält, wird mit $\mathfrak{r}^{\alpha}$ bezeichnet. Das α-bein $\pm\mathfrak{r}^{\alpha}$ heiße »speziell«.

6. „Realpolynom" 2α-ter Ordnung heiße das Polynom:

$$\mathfrak{a}^{(\alpha)} = a_{\sigma}\, v^{2\alpha-\sigma}, \quad \text{wenn:}\ a_{2\alpha-\sigma} = (-1)^{\sigma}\, a_{\sigma} \qquad (23).$$

a) Die Summe zweier Realpolynome gleicher Ordnung ist ein Realpolynom derselben Ordnung, wie selbstverständlich.

b) Das Produkt zweier Realpolynome ist ein Realpolynom[1]).

c) Daher: Das Produkt mehrerer Realtrinome ist ein Realpolynom. Aber auch umgekehrt: Jedes Realpolynom ist das Produkt von Realtrinomen[2]):

$$\mathfrak{a}^{(\alpha)} = \mathfrak{a}_{(1)}\,\mathfrak{a}_{(2)}\ldots\mathfrak{a}_{(\alpha)} \qquad (24).$$

Nach c) ist vermöge Art. 3 und 4 jedem Realpolynom $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ ein αbein $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ zugeordnet, dessen Teilvektoren die Vektoren $\mathfrak{a}_{(1)}, \mathfrak{a}_{(2)}\ldots, \mathfrak{a}_{(\alpha)}$ sind und umgekehrt[3]). Die $2\alpha+1$ Parameter seines Realpolynoms enthalten die $2\alpha+1$ Konstanten des αbeins.

Durch a) und b) sind Vielbeine definiert, die als Summe bezw. Produkt zweier Vielbeine bezeichnet werden: $\mathfrak{a}^{(\alpha)} + \mathfrak{b}^{(\alpha)} = \mathfrak{s}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{a}^{(\alpha)}\,\mathfrak{b}^{(\beta)} = \mathfrak{p}^{(\alpha+\beta)}$. Z. B. aus (20) folgt für die speziellen 2-beine $\mathfrak{i}^2$, $\mathfrak{j}^2$, $\mathfrak{k}^2$ die Relation:

$$\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{k}^2 + \mathfrak{j}^2 = 0 \qquad (25).$$

[1]) Denn ist: $p_{\alpha} = a_{\sigma}\, v^{\alpha-\sigma}$, $q_{\beta} = b_{\tau}\, v^{\beta-\tau}$, so ist: $p_{\alpha}\, q_{\beta} = a_{\sigma}\, b_{\tau}\, v^{\alpha+\beta-\sigma-\tau}$; die Koeffizienten von $v^{\sigma+\tau}$ und $v^{\alpha+\beta-\sigma-\tau}$ sind hier die Summen $a_{\alpha-\sigma}\, b_{\beta-\tau}$ bezw. $a_{\sigma}\, b_{\tau}$. Ist nun wie bei Realpolynomen: $a_{\alpha-\sigma} = (-1)^{\sigma}\,\tilde{a}_{\sigma}$, $b_{\beta-\tau} = (-1)^{\tau}\,\tilde{b}_{\tau}$, so ist die Summe: $a_{\alpha-\sigma}\, b_{\beta-\tau} = (-1)^{\sigma+\tau}\,\tilde{a}_{\sigma}\,\tilde{b}_{\tau} = (-1)^{\sigma+\tau}\,\widetilde{a_{\sigma}\, b_{\tau}}$, womit der Satz bewiesen.

[2]) Denn es läßt sich leicht zeigen, daß für die Wurzeln eines Realpolynoms paarweise gilt: $v_{\mu} = -1/\tilde{v}_{\lambda}$; demnach ist es das Produkt von Faktoren $i k_{\lambda}\,(v - v_{\lambda})\,(\tilde{v}_{\lambda}\, v + 1)$, also nach (23) von Realtrinomen, mal einer Zahl, die reell sein muß, da für das Realpolynom (23) gilt.

[3]) Diese Zuordnung eines reellen Vielbeins und eines Realpolynoms ist umkehrbar eindeutig, wobei aber alle Vielbeine als gleich anzusehen sind (vgl. Art. 5), welche dasselbe Produkt der Beträge ihrer Teilvektoren haben und sich nur durch eine gerade Anzahl entgegengesetzter Richtungen ihrer Teilvektoren unterscheiden. Würde statt des Realpolynoms ein anderes Polynom 2α-ter Ordnung gewählt werden, so wäre seine Darstellung als Produkt von Realtrinomen nicht möglich; jeder Zerlegung dieses Polynoms in Trinome, oder einer anderen Zerlegung eines Realpolynoms in andere als Realtrinome, würde ein Vielbein mit eventuell imaginären Teilvektoren entsprechen. Aber die den einzelnen derartigen Zerlegungen entsprechenden Vielbeine sind nicht mehr als gleich anzusehen. Z. B. würde ein beliebiges Polynom vierter Ordnung drei 2-beine liefern, die wohl in ihren Wurzelvektoren übereinstimmen, aber in ihren Beträgen verschieden sind; ein Realpolynom vierter Ordnung würde ein reelles und zwei imaginäre 2-beine liefern. (Vergl. E. Waelsch, Wien, Monatshefte, Bd. 17, § 2.)

Der $\varkappa$bund zweier Realpolynome ist ein Realpolynom[1]. Z. B. ist der Vollbund zweier Realpolynome gleicher Ordnung ein reeller Skalar.

Daher: Der $\varkappa$bund $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)}$ der Realpolynome zweier Vielbeine $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\beta)}$ ist ein Realpolynom; er ist von der Ordnung $2(\alpha+\beta-\varkappa)$ und gehört nach obigem zu einem $(\alpha+\beta-\varkappa)$-bein, welches »$\varkappa$-bund der Vielbeine $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\beta)}$« genannt und auch mit $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)}$ bezeichnet werden möge[2].

Wenn $\varkappa = 2\alpha$, heißt $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{2\alpha}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)}$: »Vollbund der Vielbeine $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\beta)}$ bez. $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$«, und wenn $\varkappa = 2\beta$ heißt $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{2\beta}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)}$ »Vollbund derselben bez. $\mathfrak{b}^{(\beta)}$«; beide werden mit $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{b}^{(\beta)}$ bezeichnet. Der »Vollbund $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{2\alpha}{:} \mathfrak{b}^{(\alpha)} = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{b}^{(\alpha)}$«, schlechtweg, der Vielbeine gleicher Ordnung $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$ ist ein reeller Skalar. Es ist: $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{0}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)} = \mathfrak{a}^{(\alpha)}\, \mathfrak{b}^{(\beta)}$.

Nach Satz 1 ist:

$$\mathfrak{b}^{(\beta)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{a}^{(\alpha)} = (-1)^{\varkappa}\, \mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)} \quad \text{(I)},$$

und nach Satz 2:

$$\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{a}^{(\alpha)} = 0 \quad \text{(II)},$$

wenn $\varkappa$ ungerade.

Nach (5) und (6) ist:

$$(\mathfrak{a}^{(\alpha)} + \mathfrak{b}^{(\alpha)}) \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{c}^{(\gamma)} = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{c}^{(\gamma)} + \mathfrak{b}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{c}^{(\gamma)}; \quad \mathfrak{c}^{(\gamma)} \underset{\varkappa}{:} (\mathfrak{a}^{(\alpha)} + \mathfrak{b}^{(\alpha)}) = \mathfrak{c}^{(\gamma)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{a}^{(\alpha)} + \mathfrak{c}^{(\gamma)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{b}^{(\alpha)} \quad \text{(III)},$$

$$c\,(\mathfrak{a}^{(\alpha)} \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)}) = (c\,\mathfrak{a}^{(\alpha)}) \underset{\varkappa}{:} \mathfrak{b}^{(\beta)} = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (c\,\mathfrak{b}^{(\beta)}) \quad \text{(IV)}.$$

Ferner ist nach Satz 4:

$$\mathfrak{a}^{(\alpha \geqq \beta+\gamma)} \cdot \mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{c}^{(\gamma)} = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (\mathfrak{b}^{(\beta)}\, \mathfrak{c}^{(\gamma)}) \quad \text{(V)}.$$

Zu einem Verbande der Polynome mehrerer Vielbeine gehört ein Vielbein, welches Verband dieser Vielbeine heißt. Zwischen solchen Verbänden von Vielbeinen bestehen Relationen, die durch die Relationen zwischen den Verbänden der Polynome (s. Art. 3) gegeben sind; z. B. zwischen dem 2bein $\mathfrak{z}$ und dem Vektor $\mathfrak{x}$, wenn noch das 2bein $\frac{1}{2}\mathfrak{z} \underset{2}{:} \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{h}$ bezeichnet wird, die Relationen:

$$\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x} \underset{1}{:} \mathfrak{x} = \mathfrak{z} \underset{3}{:} \mathfrak{x}^2,\ \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{z} = 2\,\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{x} + \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}\,\mathfrak{x},\ 12\,\mathfrak{z} \underset{2}{:} \mathfrak{h} = \mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}\,\mathfrak{z},\ 6\,\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{h} = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{z}\,\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x} + 2\,\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{z}\,\mathfrak{x} \quad (26),$$

die sich leicht aus den Derivaten von $\mathfrak{z} \cdot \mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}^2$, $\frac{1}{2}\mathfrak{z} \underset{2}{:} \mathfrak{z}$ ergeben[3].

III. Kugelfunktionen und Vielbeine.

7. Die Kugelfunktionen. a) Die Kugelfunktion X^α von x, y, z oder das »Sphäronom« α-ter Ordnung heiße reell, wenn reelle x, y, z einen reellen Funktionswert geben. Es gilt der Satz:

---

[1]) Beweis (vgl. Fußn. 3, S. 38): Wird $p_\alpha = \alpha_\lambda\, a_\lambda\, v^{\alpha-\lambda}$ gesetzt, und wie in Art. 1 als Summe $c_\sigma\,(v - a_{(\sigma)})^\alpha$ dargestellt, so ist: $a_\lambda = (-1)^\lambda\, c_\sigma\, a^\lambda_{(\sigma)}$, und für q_β ebenso: $b_\mu = (-1)^\mu\, c'_\tau\, b^\mu_{(\tau)}$. Weiters ist: $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta = \left(c_\sigma\, a^\alpha_{(\sigma)\,v}\right) \underset{\varkappa}{:} \left(c'_\tau\, b^\beta_{(\tau)\,v}\right) = c_\sigma\, c'_\tau\, a^\alpha_{(\sigma)\,v} \underset{\varkappa}{:} b^\beta_{(\tau)\,v} = c_\sigma\, c'_\tau\, (b_{(\tau)} - a_{(\sigma)})^\varkappa\, (v - a_{(\sigma)})^{\alpha'}\, (v - b_{(\tau)})^{\beta'}$.

Demnach ist der Koeffizient $k_{\psi+\chi}$ von $v^{\gamma-\psi-\chi}$ in dem Polynom $p_\alpha \underset{\varkappa}{:} q_\beta$, dessen Ordnung $\gamma = \alpha' + \beta' = \alpha + \beta - 2\varkappa$ ist, gegeben als $= (-1)^{\varphi+\psi+\chi}\, \varkappa_\varphi\, \alpha'_\psi\, \beta'_\chi\, c_\sigma\, c'_\tau\, a^{\varphi+\psi}_{(\sigma)}\, b^{\varkappa-\varphi+\chi}_{(\tau)}$ $= (-1)^{\varkappa-\varphi}\, \varkappa_\varphi\, \alpha'_\psi\, \beta'_\chi \left[(-1)^{\varphi+\psi}\, c_\sigma\, a^{\varphi+\psi}_{(\sigma)} = a_{\varphi+\psi}\right] \left[(-1)^{\varkappa-\varphi+\chi}\, c'_\tau\, b^{\varkappa-\varphi+\chi}_{(\tau)} = b_{\varkappa-\varphi+\chi}\right]$.

Hieraus ergibt sich der Koeffizient $k_{\gamma-(\psi+\chi)} = k_{(\alpha'-\psi)+(\beta'-\chi)}$, indem statt ψ, χ bezw. $\alpha'-\psi$, $\beta'-\chi$ gesetzt wird als: $k_{\gamma-(\psi+\chi)} = (-1)^{\varkappa-\varphi}\, \varkappa_\varphi\, \alpha'_\psi\, \beta'_\chi\, a_{\alpha'+\varphi-\psi}\, b_{\beta-\varphi-\chi}$. Ist nun wie bei Realpolynomen $a_{\alpha-\rho} = (-1)^\rho\, \tilde{a}_\rho$, $b_{\beta-\rho} = (-1)^\rho\, \tilde{b}_\rho$, so folgt daher:

$$k_{\gamma-(\psi+\chi)} = (-1)^{\varkappa-\varphi}\, \varkappa_\varphi\, \alpha'_\psi\, \beta'_\chi \left((-1)^{\varkappa-\varphi+\psi}\, \tilde{a}_{\varkappa-\varphi+\psi}\right)\left((-1)^{\varphi+\chi}\, \tilde{b}_{\varphi+\chi}\right)$$

$=$ wenn noch $\varkappa-\varphi$ statt φ eingeführt wird $= (-1)^{\psi+\chi}\, \tilde{k}_{\psi+\chi}$,

womit der Satz bewiesen erscheint.

[2]) Zur Begründung der Einführung der Realpolynome, in Ergänzung der vorletzten Fußnote: Würden statt der Realpolynome andere gewählt, so würde auch dem $\varkappa$-bund der Polynome kein bestimmtes Vielbein entsprechen. Immerhin könnte jedes der sich aus den Zerlegungen des $\varkappa$bundpolynoms ergebenden Vielbeine als $\varkappa$bund der Vielbeine angesprochen werden, welche die Zerlegungen der gegebenen Polynome liefern. Wenn dann ebenso schon im Eingange jedem Trinom zweiter Ordnung ein Vektor zugeordnet wird, ohne Beschränkung auf reelle Vektoren, so könnte rein formal die vorliegende Analyse scheinbar einfacher begründet werden.

[3]) Diese sind nach Art. 3 bezw., wenn $\mathfrak{z}$ das Polynom $\mathfrak{z}_4$ hat:

$$\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{x}_0 - 2\,\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z}_2\,\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{z}_3\,\mathfrak{x}_0 - 2\,\mathfrak{z}_2\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z}_1\,\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{z}_2\,\mathfrak{x}_0 - 2\,\mathfrak{z}_1\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{z}_0\,\mathfrak{x}_2;\ \mathfrak{x}_2^2,\ \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_1,\ \tfrac{1}{3}(2\,\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2\,\mathfrak{x}_3),\ \mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_0,\ \mathfrak{x}_0^2;$$
$$\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_2 - \mathfrak{z}_3^2,\ \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_1 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_2,\ \tfrac{1}{6}(\mathfrak{z}_4\,\mathfrak{z}_0 + 2\,\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_1 - 3\,\mathfrak{z}_2^2),\ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{z}_3\,\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_1),\ \mathfrak{z}_2\,\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_1^2.$$

Zu jedem α**bein** $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ **gehört ein reelles Sphäronom** X^α, **nämlich der nach** Art. 6 **reelle Vollbund des** α**beins mit dem speziellen** α**bein** $\mathfrak{x}^\alpha = (x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k})^\alpha$ **also:**

$$X^\alpha = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{x}^\alpha \qquad \text{(VI)}.$$

Denn es ist: $\frac{\partial}{\partial x} X^\alpha = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{x}^\alpha = \alpha\, \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (\mathfrak{x}^{\alpha-1}\,\mathfrak{i})$; $\frac{\partial^2}{\partial x^2} X^\alpha = \alpha(\alpha-1)\,\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (\mathfrak{x}^{\alpha-2}\,\mathfrak{i}^2)$,

analog für $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; daher nach (25):

$$\Delta X^\alpha = \alpha(\alpha-1)\,\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (\mathfrak{x}^{\alpha-2}\,[\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{j}^2 + \mathfrak{k}^2 = 0]) = 0.$$

b) **Um für ein gegebenes Sphäronom** X^α **sein Vielbein** $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, **also dessen** Polynom $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ **zu finden, werde die folgende als »Reduktion« zu bezeichnende Trans**formation einer Funktion $F(x, y, z)$ in eine Funktion $f(v)$ **eingeführt: Es werde für** x, y, z gesetzt:

$$x = {}^1/_2\,(u^2 + 1),\quad y = {}^1/_2\,i\,(u^2 - 1),\quad z = i\,u \qquad (27),$$

also für den Vektor $\mathfrak{x} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}$ nach Art. 8 **das Trinom** $(v-u)^2$, **worauf dann noch** v für u **geschrieben wird, so daß auch:** $F({}^1/_2\,(v^2+1),\ {}^1/_2\,i\,(v^2-1),\ i\,v) = f(v)$.

Das Polynom $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ des Sphäronoms X^α **ergibt sich nun aus ihm durch diese** Reduktion; denn es ist:

$$\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot [\mathfrak{x}^\alpha = (v-u)^{2\alpha} = u_v^{2\alpha}] = (\text{Fußn.}\,^1),\ \text{Art.}\ 2) = \mathfrak{a}^{(\alpha)}(u),$$

worauf wenn $u = v$ **gesetzt wird, das fragliche Polynom entsteht.**

c) Die Form F^ν, ν-ter Ordnung in x, y, z **läßt sich bekanntlich in einer Weise** nach Sphäronomen entwickeln wie folgt:

$$F^\nu = r^{2\sigma} X^{\nu-2\sigma},\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{(VII)}.$$

Es kann dies hier wie **folgt bewiesen werden:** F^ν **besitzt** ${}^1/_2\,(\nu+1)(\nu+2)$ **Kon**stanten, **d. i. die Summe der Konstanten** $2\nu + 1 - 4\sigma$ **der in** (VII) **rechts stehenden** $X^{\nu-2\sigma}$. Ferner: Zwischen den Funktionen **rechts:** X^ν, $r^2 X^{\nu-2}$, $r^4 X^{\nu-4}$, ... **besteht** keine lineare Identität; **denn sonst gäbe die obige Reduktion, da sie auf** r^2 **angewendet** Null ergibt, **auf** X^ν **angewendet auch Null, wo sie aber nach b) das Polynom** $\mathfrak{a}^{(\nu)}$ **liefert.** Deshalb wäre $\mathfrak{a}^{(\nu)} \equiv 0$, **also** $X^\nu \equiv 0$. **Dann aber müßte eine Identität zwischen** $X^{\nu-2}$, $r^2 X^{\nu-4}$, . . . **bestehen, die Reduktion gäbe wie soeben** $X^{\nu-2} \equiv 0$, **usw.**

d) **Es ist, wenn** $[\lambda]_\rho$ **das Produkt der** ϱ **positiven ganzen Zahlen** $\equiv \lambda \bmod 2$, **die** $\leqq \lambda$ sind, bedeutet:

$$\Delta^\rho (r^\lambda X^\mu) = [\lambda]_\rho\,[\lambda + 2\mu + 1]_\rho\, r^{\lambda-2\rho} X^\mu \qquad (28).$$

Denn es ist: $\frac{\partial}{\partial x}(r^\lambda X^\mu) = \lambda\, r^{\lambda-2}\, x\, X^\mu + r^\lambda \frac{\partial}{\partial x} X^\mu$,

worauf: $\frac{\partial^2}{\partial x^2} r^\lambda X^\mu) = \lambda\,(\lambda_{-2})\, r^{\lambda-4} x^2 X^\mu + \lambda\, r^{\lambda-2} X^\mu + 2\lambda\, r^{\lambda-2}\, x \frac{\partial}{\partial x} X^\mu + r^\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} X^\mu$,

ebenso $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$, **also:**

$$\Delta (r^\lambda X^\mu) = \lambda(\lambda-2)\, r^{\lambda-2} X^\mu + 3\lambda\, r^{\lambda-2} X^\mu$$
$$+ 2\lambda\, r^{\lambda-2}\left[x \frac{\partial}{\partial x} X^\mu + \ldots = \mu X^\mu\right] + r^\lambda [\Delta X^\mu = 0] = \lambda(\lambda + 2\mu + 1)\, r^{\lambda-2} X^\mu \qquad (29),$$

und hieraus durch vollständige Induktion (28).

Nach (VII) **und** (28) **ist demnach:**

$$\Delta^\rho F^\nu = \Delta^\rho (r^{2\sigma} X^{\nu-2\sigma}) = [2\sigma]_\rho\,[2\nu - 2\sigma + 1]_\rho\, r^{2\sigma-2\rho} X^{\nu-2\sigma} \qquad (30).$$

Hier fallen die Glieder mit $\sigma < \varrho$ **aus; das erste mit** $\sigma = \varrho$ **ist:** $[2\varrho]_\rho\,[2\nu - 2\varrho + 1]_\rho\, X^{\nu-2\rho}$, **und die weiteren haben den Faktor** r^2. **Wird daher in** (30) **die Reduktion vorgenommen,** so ergibt sich **nach b) das Polynom** $\mathfrak{a}^{(\nu-2\rho)}$ **des Sphäronoms** $X^{\nu-2\rho}$ **durch Reduktion von** $\Delta^\rho F^\nu / [2\varrho]_\rho\,[2\nu - 2\varrho + 1]_\rho$.

e) Da die Entwicklung (VII), **auf das allgemeine Sphäronom angewendet, nur in** einer Weise erfolgen kann **und** (29) **gilt, ist** $X^\alpha = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{x}^\alpha$, **wo** $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$ **das allgemeine** α**bein** mit $2\alpha + 1$ **Konstanten, auch das allgemeine Sphäronom mit ebensoviel Konstanten.**

8. Entwicklung des Produkts zweier Sphäronome nach solchen. Es sei nun:

$$F^{\nu = \alpha + \beta} = X^\alpha X^\beta = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{x}^\alpha\, \mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{x}^\beta.$$

Dann ist: $\Delta^\rho X^\alpha X^\beta = [2\alpha]_\rho\,[2\beta]_\rho\,(\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{x}^{\alpha-\rho}) \cdot (\mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{x}^{\beta-\rho})$;

denn es ist: $\frac{\partial}{\partial x}(X^\alpha X^\beta) = \alpha\, \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (\mathfrak{r}^{\alpha-1}\mathfrak{i})\, X^\beta + \beta\, X^\alpha\, \mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot (\mathfrak{r}^{\beta-1}\mathfrak{i})$,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X^\alpha X^\beta) = \alpha(\alpha-1)\, \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-2} \cdot \mathfrak{i}^2 X^\beta + 2\alpha\beta\, \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot (\mathfrak{r}^{\alpha-1}\mathfrak{i})\, \mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot (\mathfrak{r}^{\beta-1}\mathfrak{i})$$
$$+ \beta(\beta-1)\, \mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot (\mathfrak{r}^{\beta-2}\mathfrak{i}^2)\, X^\alpha,$$

ebenso für $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; daher nach (25) und (V):

$$\Delta(X^\alpha X^\beta) = 2\alpha\beta\,[[\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-1} = \mathfrak{r}'] \cdot \mathfrak{c} = 2x_1']\, 2y_1' + \ldots = 4\alpha\beta\, \mathfrak{a}^\alpha \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-1}\, \mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{r}^{\beta-1}.$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich hieraus:

$$\Delta^\rho (X^\alpha X^\beta) = k_\rho\, (\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-\rho}) \cdot (\mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{r}^{\beta-\rho}), \text{ mit } k_\rho = [2\alpha]_\rho\, [2\beta]_\rho \quad . \quad . \quad (31);$$

denn es ist wie soeben: $\Delta^{\rho+1}(X^\alpha X^\beta) = 4k_\rho(\alpha-\varrho)(\beta-\varrho)(\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-\rho-1}) \cdot (\mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{r}^{\beta-\rho-1})$, so daß $k_{\rho+1} = 4k_\rho(\alpha-\varrho)(\beta-\varrho)$, und vermöge dieser Rekursionsformel k_ρ den in (31) angegebenen Wert erhält.

Wird jetzt $X^\alpha X^\beta$ nach (VII) entwickelt, so ergibt sich das Polynom $\mathfrak{a}^{(\alpha+\beta-2\rho)}$ des Sphäronoms $X^{\alpha+\beta-2\rho}$ der Entwicklung durch Reduktion von

$$[2\alpha]_\rho\, [2\beta]_\rho\, (\mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-\rho}) \cdot (\mathfrak{b}^{(\beta)} \cdot \mathfrak{r}^{\beta-\rho}) / [2\varrho]_\rho\, [2\alpha + 2\beta - 2\varrho + 1]_\rho.$$

Bei dieser Reduktion wird nach Art. 7 gesetzt: $\mathfrak{r} = (v-u)^2$, so daß nach Satz 5 folgt:

$$\mathfrak{a}^{(\alpha+\beta-2\rho)} = [2\alpha]_\rho\, [2\beta]_\rho\, \mathfrak{a}^{(\alpha)} \mathbin{\dot{:}}_{2\rho} \mathfrak{b}^{(\beta)} / [2\varrho]_\rho\, [2\alpha + 2\beta - 2\varrho + 1]_\rho.$$

Es werde nun noch der »*κbund* $X^\alpha \mathbin{\dot{:}}_\varkappa X^\beta$ der *Sphäronome* X^α, X^β« eingeführt, d. i. das Sphäronom $X^{\alpha+\beta-\varkappa}$, das zum κ-bund $\mathfrak{a}^{(\alpha)} \mathbin{\dot{:}}_\varkappa \mathfrak{b}^{(\beta)}$ der Vielbeine $\mathfrak{a}^{(\alpha)}$, $\mathfrak{b}^{(\beta)}$ der Sphäronome $X^\alpha X^\beta$ gehört. Ferner werde eingeführt der »Sphäronomialkoeffizient«

$$\{\lambda\}_\mu = [\lambda]_\mu / [2\mu]_\mu = \lambda(\lambda-2) \ldots (\lambda - 2\mu + 2) / 2\mu(2\mu-2) \ldots 2,$$

der analog zum Binomialkoeffizienten $\lambda_\mu = \lambda(\lambda-1) \ldots (\lambda-\mu+1)/\mu(\mu-1) \ldots 1$ gebildet ist, und für ein gerades λ zu einem solchen wird.

Die gesuchte *Entwicklung* lautet dann:

$$X^\alpha X^\beta = c_\sigma X^\alpha \mathbin{\dot{:}}_{2\sigma} X^\beta r^{2\sigma}, \qquad c_\sigma = \{2\alpha\}_\sigma\, \{2\beta\}_\sigma / \{2\alpha + 2\beta - 2\sigma + 1\}_\sigma \quad . \quad (\text{VIII}),$$

wo auch

$$c_\sigma = [2\alpha]_\sigma\, [2\beta]_\sigma / [2\sigma]_\sigma\, [2\alpha + 2\beta - 2\sigma + 1]_\sigma$$
$$= 2^{2\sigma}\, \alpha_\sigma \beta_\sigma\, (\alpha+\beta-\sigma)_\sigma / (2\sigma)_\sigma\, (2\alpha + 2\beta - 2\sigma + 1)_{2\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Z. B. ist:

a) $X^\alpha X^1 = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{r}^\alpha\, \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r} = X^\alpha \mathbin{\dot{:}}_0 X^1 + \frac{2\alpha}{2\alpha+1} X^\alpha \cdot X^1 r^2 = \mathfrak{a}^{(\alpha)} \mathbin{\dot{:}}_0 \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha+1} + \frac{2\alpha}{2\alpha+1} \mathfrak{a}^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r}^{\alpha-1} r^2$

und (vergl. (15)): $X^1 X'^1 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{r}\, \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{a} \mathbin{\dot{:}}_0 \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{r}^2 + {}^2/_3\, \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}\, r^2$.

b) Es ist xyz ein Sphäronom dritter Ordnung, dessen 3bein durch Reduktion (s. Art. 7 (b)) erhalten wird als ${}^1/_8\, \mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$, so daß, wenn das 3bein $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet wird, gilt $8xyz = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{r}^3$. Daher ist nach (VIII) für $\alpha = \beta = 3$:

$$64x^2y^2z^2 = (\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{r}^3)^2 = \mathfrak{D}^2 \cdot \mathfrak{r}^6 + \frac{18}{11} \mathfrak{D} \mathbin{\dot{:}}_2 \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{r}^4 r^2 + \frac{16}{35} \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D}\, r^6 \quad . \quad . \quad (32).$$

Hierin ist auch[2]: $\mathfrak{D} \cdot \mathfrak{D} = {}^4/_3$.

Ferner ist $-\mathfrak{D}^2$ das 6bein, welches die Vektoren $\pm \mathfrak{i}$, $\pm \mathfrak{j}$, $\pm \mathfrak{k}$ als Teilvektoren enthält, die also nach den Ecken des regulären »Einheits«oktaeders gehen.

Für das 4-bein $\mathfrak{D} \mathbin{\dot{:}}_2 \mathfrak{D}$ gilt[2]:

$$\mathfrak{D} \mathbin{\dot{:}}_2 \mathfrak{D} = {}^2/_9\, (\mathfrak{j}^2\mathfrak{k}^2 + \mathfrak{k}^2\mathfrak{i}^2 + \mathfrak{i}^2\mathfrak{j}^2) = {}^1/_{18}\, (\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k})(\mathfrak{i}+\mathfrak{j}-\mathfrak{k})(\mathfrak{i}-\mathfrak{j}+\mathfrak{k})(-\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}).$$

Daher gehen die Teilvektoren $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}+\mathfrak{j}-\mathfrak{k}$, $\mathfrak{i}-\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$, $-\mathfrak{i}+\mathfrak{j}+\mathfrak{k}$ des 4beins $18\,\mathfrak{D} \mathbin{\dot{:}}_2 \mathfrak{D}$ nach den Ecken eines der zu dem Einheitsoktaeder hemiedrischen Tetraeder. Der Betrag dieses 4beins ist 9, da seine Teilvektoren den Betrag $\sqrt{3}$ haben[3].

136

---

[1] Bei E. Waelsch, l. c. ist nur die letzte Form von c_σ angegeben. Vergl. die obige neue Form von c_σ in (VIII) mit der des Koeffizienten $(2\alpha)_\sigma\, (2\beta)_\sigma / (2\alpha + 2\beta + 1 - \sigma)_\sigma$ in der Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung der doppeltbinären Form $a_x^{2\alpha}\, b_y^{2\beta}$.

[2] Das Polynom des 3beins $\mathfrak{D} = \mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ ist nach (20): $\mathfrak{d}_6 = (v^2+1)\,i\,(v^2-1)\,2iv = -2v^5 + 2v$; daher sind seine Derivate: $\mathfrak{d}_6$, $\mathfrak{d}_5 = -{}^5/_3\, v^4 + {}^1/_3$, $\mathfrak{d}_4 = -{}^4/_3\, v^3$, $\mathfrak{d}_3 = -v^2$, $\mathfrak{d}_2 = -{}^2/_3\, v$, $\mathfrak{d}_1 = -{}^1/_3$, $\mathfrak{d}_0 = 0$.

Folglich ist:

$${}^1/_2\, \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{d}_6\mathfrak{d}_0 - 6\mathfrak{d}_5\mathfrak{d}_1 + 15\mathfrak{d}_4\mathfrak{d}_2 - 10\mathfrak{d}^2_3 = {}^2/_3$$
$${}^1/_2\, \mathfrak{d} \mathbin{\dot{:}}_4 \mathfrak{d} = \mathfrak{d}_6\mathfrak{d}_2 - 4\mathfrak{d}_5\mathfrak{d}_3 + 3\mathfrak{d}_4^2 = 0, \quad {}^1/_2\, \mathfrak{d} \mathbin{\dot{:}}_2 \mathfrak{d} = \mathfrak{d}_6\mathfrak{d}_4 - \mathfrak{d}_5^2 = {}^1/_9\, (\mathfrak{j}_2^2\mathfrak{k}_2^2 + \mathfrak{k}_2^2\mathfrak{i}_2^2 + \mathfrak{i}_2^2\mathfrak{j}_2^2).$$

[3] Vergl. E. Study, Irrat. covariants of certain binary forms, Am. Journ. t. 17.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Nomographische Darstellungsmöglichkeiten.

Von **P. LUCKEY** in Elberfeld.

Die Tatsache, daß die von M. d'Ocagne eingeführten Nomogramme nach dem Fluchtungsverfahren viel Verbreitung gefunden haben, legt die Frage nahe, ob noch neue, anders eingerichtete graphische Rechentafeln erfunden werden können. Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, wie man das Nomogramm definiert. Versteht man unter Nomogrammen diejenigen Gebilde, die d'Ocagne in seiner »allgemeinen Theorie«[1]) kennzeichnet, und unterwirft man sich den Anwendungsvorschriften, die er für diese Gebilde aufstellt, so darf man eben anders eingerichtete Rechenhilfsmittel nicht als Nomogramme bezeichnen und man kann höchstens fragen, ob spezielle Typen innerhalb des allgemeinen Begriffs, die bisher noch nicht angewandt wurden, die nähere Untersuchung und die Verwendung lohnen.

1. Das allgemeinste Nomogramm von d'Ocagne. Das »allgemeinste Nomogramm« zeigt nach der genannten Theorie folgenden Bau. Man denke sich eine Anzahl ebener Blätter aufeinander gelegt, derart, daß jedes Blatt in seiner Ebene in eine beliebige Lage gebracht werden kann. Damit man sieht, was auf den einzelnen Blättern gezeichnet und geschrieben ist, seien alle Blätter durchsichtig mit Ausnahme des untersten. Während letzteres also etwa ein Bogen weißen Papiers ist, bestehen alle darüber liegenden aus gut durchsichtigem, hinreichend starkem Pauspapier. Die geometrischen »Elemente« nun, mit denen es die Nomographie zu tun hat, sind Punkte oder Kurven, und zwar einzelne sowohl wie auch Angehörige von Punktescharen oder Kurvenscharen, die ein für allemal auf den verschiedenen Ebenen gezeichnet sind. Diese Elemente oder Elementescharen — man könnte sie als »Skalen« oder »Leitern« in verallgemeinerter Bedeutung des Wortes bezeichnen — sind entweder unbeziffert oder beziffert (kotiert). Bei der Benutzung des Nomogramms liegt die unterste Ebene Π_1 fest, die zweite Ebene Π_2 wird so bewegt (verschoben oder gedreht oder beides), daß ihre Elemente zu denjenigen der Ebene Π_1 in eine Lagenbeziehung treten, durch die die beiden Ebenen fest miteinander verbunden werden: Π_2 wird auf Π_1 »eingestellt«. Entsprechend werden die folgenden Ebenen Π_3, Π_4 usw. nacheinander auf die schon fest verbundenen vorhergehenden Ebenen eingestellt. Die einzige, von d'Ocagne zugelassene Lagenbeziehung zweier Elemente ist nun die »Berührung«. Eine »Berührung« zweier Elemente in der hier gebrauchten Wortbedeutung liegt nicht nur vor, wenn eine Kurve eine andere im gebräuchlichen Sinne des Wortes berührt — diese Art Berührung zweier Kurven wird vielmehr sehr selten verwandt —, sondern vor allem auch, wenn ein (bezifferter oder unbezifferter) Punkt auf eine (bezifferte oder unbezifferte) Linie fällt, oder wenn zwei Geraden parallel sind (denn dann liegt der unendlich ferne Punkt der einen auf der anderen). Schneiden sich z. B. drei Linien in einem Punkt, so ist die eine von ihnen »in Berührung« mit dem Schnittpunkt der beiden anderen. Fällt ein Punkt auf einen anderen, so ist das eine »Doppelberührung«; ebenso liegt eine Doppelberührung vor, wenn zwei Geraden oder zwei Kreise von gleichem Halbmesser aufeinder fallen. Die einfache Berührung zweier Elemente E_1 und E_2 wird durch $E_1 \vdash\!\dashv E_2$ bezeichnet. Bei Doppelberührung schreibt man $E_1 \models\!\dashv E_2$. Π_2 wird durch drei einfache Berührungen mit Π_1 fest verbunden (auf Π_1 eingestellt). So entsteht der Verband (l'ensemble) $\Pi_1 \Pi_2$. Dann wird Π_3 auf die verbundenen Ebenen Π_1 und Π_2 ebenfalls vermittelst dreier einfacher Berührungen eingestellt, wobei ein Element von Π_3 eine Berührung mit einem Element jeder der vorhergehenden Ebenen Π_1 und Π_2 eingehen darf. Damit ist der Verband $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$ gebildet. Das geht so fort, bis die letzte Ebene

---

[1]) 1. Traité de Nomographie, Paris 1899, S. 390. 2. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie, Paris 1903. 3. Calcul graphique et Nomographie, Paris 1908, S. 364. — Nach Beendigung der obigen Arbeit konnte ich, dank der Liebenswürdigkeit des Herrn Dr.-Ing. O. Lacmann in Kristiania, in die zweite, umgearbeitete Auflage des »Traité« (1921) Einblick nehmen. In bezug auf die hier vorliegenden Fragen geht sie nicht über die angeführten früheren Werke von d'Ocagne hinaus.

Π_n durch die Berührungen dreier ihrer Elemente mit Elementen der vorhergehenden Ebenen festgelegt ist und damit die n Ebenen zu dem Verband $\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_n$ vereinigt sind. Es sind also $3n-3$ einfache Berührungen zu vollziehen, um alle Ebenen nacheinander festzulegen. Diese Berührungen heißen »Einstellberührungen«. Zwei einfache Berührungen können dabei stets durch eine Doppelberührung ersetzt werden. Nun ist auf der letzten Ebene Π_n noch ein viertes Element gezeichnet, und ferner trägt eine der vorhergehenden Ebenen ein weiteres, bisher nicht benutztes Element. Durch das vorhin geschilderte Einstellen der Ebenen sind diese beiden weiteren Elemente auch in eine gewisse Berührung getreten (z. B. fällt ein Punkt einer Punkteschar auf eine Kurve einer Kurvenschar), und diese Berührung kann »konstatiert« werden. Da hierbei der Wert der unbekannten Variablen (die Lösung der Gleichung) als Bezifferung an einem der Elemente abgelesen wird, so heißt diese Berührung »Lösungsberührung«. Wir haben also zwischen den n Ebenen im ganzen $3n-2$ Berührungen, nämlich $3n-3$ Einstellberührungen und eine Lösungsberührung[1]), und zwar kann jede der Berührungen die Rolle der Lösungsberührung oder einer Einstellberührung übernehmen. Jede Berührung eines Elementes von Π_2 mit einem Elemente von Π_1 drückt sich nun durch eine Gleichung aus, in welcher vorkommen

1. die Bezifferungen der beiden Elemente und
2. drei Parameter, wegen der drei Freiheitsgrade der Ebene Π_2 gegen die Ebene Π_1. (Als solche Parameter können etwa die drei Werte gewählt werden, die die Lage eines rechtwinkligen Koordinatensystems auf Π_2 zu einem solchen auf Π_1 festlegen.)

Jede weitere Berührung bringt eine neue Gleichung, jede neue Ebene 3 neue Parameter, so daß wir bei den $3n-2$ Berührungen der n Ebenen im ganzen $3n-2$ Gleichungen zwischen den Bezifferungsvariablen und den $3n-3$ Parametern haben. Durch Elimination der $3n-3$ Parameter bleibt eine Gleichung zwischen den Bezifferungsvariablen übrig. Dies ist die Gleichung, zu deren Auflösung das Nomogramm dienen soll. Da jede der $3n-2$ Berührungen die Rolle der Lösungsberührung spielen kann, so kann eine jede beliebige Variable der Gleichung als Unbekannte behandelt werden.

Dieses naturgemäß sehr blutleere Schema ist das »allgemeinste Nomogramm« d'Ocagnes. Der Begriff ist so weit gefaßt, daß er ebenso wohl die ebenen Astrolabien in sich begreift, mit denen die Araber im Mittelalter[2]) himmelskundliche Aufgaben lösten, wie die Rechenschieber und Rechenscheiben mannigfaltigster Art der neueren und neuesten Zeit, und ferner fast ausnahmslos die zahlreichen, als »Graphikon«, »Diagramm«, »Diagramminstrument«, »Abakus«, »Nomogramm«, »graphische Rechentafel« ans Tageslicht gekommenen graphischen Rechenhilfsmittel.

Man könnte das »allgemeinste Nomogramm« als ein rein geometrisches Denkgebilde behandeln, wie etwa eine Riemannsche Fläche eine Produktion des reinen geometrischen Denkens für die Zwecke der reinen Funktionentheorie ist. Da es sich aber hier um praktische Mathematik handelt, so ist es notwendig, die sinnlichen, technischen Hilfsmittel der Nomographie und ihre Handhabung und Bequemlichkeit zu betrachten. Die Zweckmäßigkeit des allgemeinen Begriffs kann sich nur darin bewähren, daß er sich jenen technischen Mitteln der praktischen Nomographie und der Handhabung dieser Mittel besonders gut anpaßt. Da ist nun die Frage maßgebend, welche technischen Hilfsmittel und welche Handhabungsweisen dieser Hilfsmittel man in der Nomographie zulässig erklären will.

---

[1]) Auf die häufig vorkommenden Fälle, wo schon eine geringere Zahl von Einstellberührungen die Lösung ermöglicht, soll hier nicht eingegangen werden.

[2]) Die sogenannten »graphischen« Verfahren des Altertums und des Mittelalters lassen sich jetzt vom Standpunkt der Nomographie aus neu durchleuchten. Auch in der zweiten Auflage des »Traité« sagt d'Ocagne noch, daß Gunter anscheinend die erste Idee einer Funktionsskala gehabt habe. Waren aber nicht solche Funktionsskalen schon am Analemma des Claudius Ptolemäus tatsächlich vorhanden? Skalen aus bezifferten Punkten und Kurven und Netze aus solchen Skalen, auch für rein nomographische Zwecke, waren bei den alten Astronomen und Gnomonikern gang und gäbe. Damit verblaßt aber die Bedeutung, die man der Darstellung topographischer Flächen durch bezifferte Höhenkurven für die Geschichte der Nomographie beilegt. Die deutschen Renaissancemathematiker Stoeffler (1452 bis 1531) und Apian (1495 bis 1552) gebrauchten in ihren deutschen Schriften für »scala« das Wort »Leiter«. Vergl. P. Luckey, die Fluchtentafel im Dienste der Himmelskunde, Sirius, 1922, Hefte 2 und 3 und P. Luckey, Zur Geschichte der Nomographie, Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturw. 1923, voraussichtlich Heft 3/4.

2. Die technischen Hilfsmittel. Bedient man sich ausschließlich ebener Blätter, und zwar so, wie es im Begriff des allgemeinsten Nomogramms gefordert wird, so ist die Theorie mit der Praxis im besten Einklang; nur wird die praktische Ausführungsmöglichkeit den theoretisch vorhandenen Möglichkeiten starke Schranken setzen durch Forderung einer sehr begrenzten Zahl von Blättern, Einfachheit der Zeichnungen, des Einstell- und Ableseverfahrens. Denn, ohne diese Schranken, würde das allgemeinste Nomogramm, rein theoretisch genommen, sogar einen großen Teil des »graphischen Rechnens« umfassen. Hat man nämlich einen hinreichenden Vorrat von durchsichtigen Ebenen, auf deren jeder ein System unbezifferter konzentrischer Kreise gezeichnet ist, ferner einen Vorrat von ebensolchen Ebenen, auf deren jeder ein geradliniger, gleichförmig geteilter und bezifferter Maßstab gezeichnet ist, so kann man durch sukzessives Aufeinanderlegen von lauter derartigen Blättern jede Konstruktion des graphischen Rechnens ausführen, die sich mit Stift, Zirkel und einem mit gewöhnlichem Maßstab versehenen Lineal auf dem Zeichenbogen vollziehen läßt.

Ließe man andererseits neben den aufeinander zu legenden ebenen Blättern, die in ihrer Art auch einen einfachen Mechanismus, eine Maschine, darstellen, noch weitgehende andere mechanische Hilfsmittel zu, so ginge das spezifisch Nomographische verloren, man hätte es mit Rechenmechanismen oder Rechenmaschinen [1]) im engeren Sinne zu tun. Den Verallgemeinerungen auf räumliche Vorrichtungen von der Art des Apparates von Mehmke zur Auflösung numerischer Gleichungen mit 4 oder 5 Gliedern [2]) oder nach Art der von O. Lacmann vorgeschlagenen stereoskopischen Nomographie [3]) wird man unter der Bezeichnung Raumnomographie einen besonderen Platz zuweisen.

Dagegen hat man die Benutzung des Lineals und des Stechzirkels als Ablesegeräte zugelassen. Läßt sich nun die Benutzung dieser Hilfsmittel mit dem Begriff des allgemeinsten Nomogramms in Einklang bringen?

Die gerade Linie des Lineals (oder des gespannten Fadens) kann als einer Ebene angehörig aufgefaßt werden, und so bleibt man auch bei Benutznng des Lineals innerhalb des von d'Ocagne geprägten Nomogrammbegriffs. Wird allerdings das Lineal für den Zweck einer einzigen Aufgabenlösung nacheinander in mehrere Lagen gebracht, wie bei den verbreiteten Nomogrammen mit Zapfenlinie, so kann d'Ocagne seinen allgemeinen Begriff nur dadurch retten, daß er für jede neue Lage ein- und desselben Lineals ein neues ebenes Blatt mit einer Geraden annimmt.

Der Stechzirkel [4]) kommt als Ablesegerät im Traité de Nomographie nicht vor. Wohl aber enthält d'Ocagnes Buch »Calcul graphique et Nomographie« einen Abschnitt (S. 346), in welchem die von dem Russen N. Gercevanoff [5]) als »Nomogramme mit äquidistanten Punkten« bezeichneten Rechentafeln eingeführt werden. Sind in der Gleichung

$$F(z_1, z_2, z_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Werte von z_1 und z_2 gegeben, so setzt man in Abb. 1 die eine Spitze eines Stechzirkels in (z_1) ein, die andere in (z_2) und dreht den Zirkel um (z_1) als Mittelpunkt — die z_1-Skale heißt daher die »Mittelpunktsleiter«, échelle centrale — bis die dritte Skale des Nomogramms von der andern Zirkelspitze getroffen wird. Der Punkt, in dem dies geschieht, ist der Träger des gesuchten Wertes z_3. D'Ocagne bezeichnet Gercevanoff als den »Urheber dieser neuen Klasse von Nomogrammen«. Es darf aber wohl darauf hingewiesen werden, daß A. Adler, der ja auch unabhängig von d'Ocagne auf die

---

[1]) Den Nomogrammen stehen besonders nahe die »algebraischen Rechenmaschinen« des spanischen Ingenieurs Torres Quevedo. Bei ihnen »verschieben sich mechanisch verbundene Zeiger derart vor stofflich verwirklichten geteilten Skalen, daß in jedem Augenblick die unter den Zeigern ablesbaren Bezifferungen einer gegebenen algebraischen Beziehung genügen.« — »In einer 1901 im Recueil des savants étrangers de l'Académie des Sciences erschienenen Arbeit hat Torres Quevedo gezeigt, daß sich jede beliebige Rechnung arithmetischer oder analytischer Natur (wie die Integration von Differentialgleichungen beliebigen Typs) mit Hilfe solcher »mechanischer Nomogramme« ausführen läßt« (d'Ocagne).

[2]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 43, 1898, S. 338.

[3]) Ztschr. f. Vermessungsw. 51, 1922, S. 136.

[4]) Newton betonte, daß bei graphischen Rechnungen der Kreis, weil leicht zeichenbar, der Parabel vorzuziehen sei, wenn auch seine Gleichung zusammengesetzter sei. Heute kann man fragen, ob nicht vom Standpunkt der nomographischen Handlichkeit der Kreis sogar der Geraden, nämlich der Stechzirkel dem Lineal, vorzuziehen sei.

[5]) In die von d'Ocagne genannte, russisch abgefaßte Schrift Gercevanoff, N., die Prinzipien der nomographischen Rechnung, St. Petersburg 1906, habe ich keinen Einblick nehmen können.

Idee der Fluchtentafeln kam, schon in einer 1890 erschienenen Arbeit[1]) den Stechzirkel zur nomographischen Lösung von Gleichungen benutzte. Die alte graphische Lösung der Gleichungen bis zum vierten Grade durch Schnitt eines Kreises mit einer festen Parabel arbeitete Adler nämlich in der Weise nomographisch aus, daß der Kreis nicht mehr gezogen, sondern wie bei Gercevanoff mit einem Stechzirkel in eine aus bezifferten Skalen bestehende, ein für allemal fertige Abbildung hineingelegt wird. Den Begriff Skale muß man dabei, wie üblich, in dem weiteren Sinne verstehen, daß es sich nicht, wie in Abb. 1, um drei Punkteskalen mit je einer Bezifferung handeln muß. Nur eine der von Adler benutzten »Skalen« ist von dieser Art, nämlich die geteilte und mit den Werten der gesuchten Wurzeln bezifferte feste Parabel; eine zweite von ihm benutzte Skale ist eine solche von Punkten mit zwei Bezifferungen (points à 2 cotes), also das Netz zweier Scharen bezifferter Kurven, und zwar ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatennetz. Als dritte »Skale« tritt bei Adlers Auflösung der reduzierten Gleichung dritten Grades ein Punkt, nämlich der Scheitelpunkt der Parabel auf. Allerdings formuliert Adler das Verfahren nicht als allgemeines Prinzip und arbeitet nicht mit dem allgemeinen Skalenbegriff. Auch kann man in seine Tafel nicht ohne weiteres mit den Koeffizienten der vorgelegten Gleichung eingehen, man muß vielmehr zunächst aus den Koeffizienten gewisse Hifsgrößen numerisch berechnen, mit denen man dann in die Tafelhineingehen kann[2]).

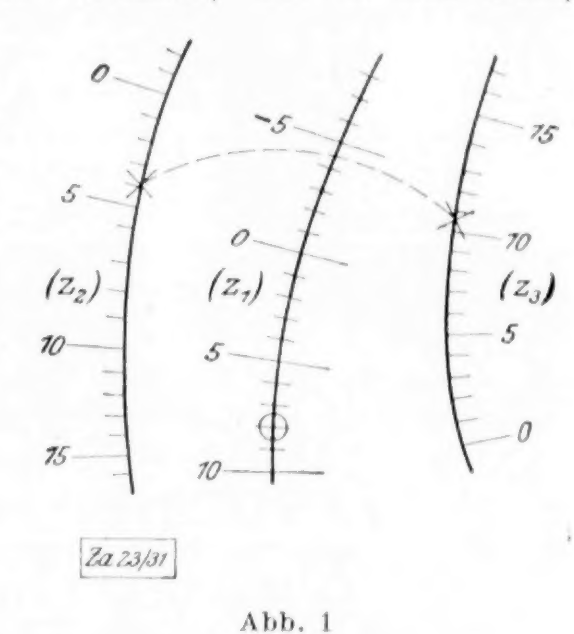


Abb. 1

Auch die Nomogramme mit äquidistanten Punkten fügen sich dem Begriff des allgemeinsten Nomogramms. Man braucht ja nur statt des Stechzirkels ein durchsichtiges Blatt mit einer Schar unbezifferter konzentrischer Kreise zu benutzen. Es scheint auch, wenigstens nach dem Zusammenhang, in dem die Dinge bei d'Ocagne dargestellt sind, daß diese Nomogramme bei Gercevanoff geradezu durch den Versuch zur Entdeckung gekommen sind, die Schar paralleler Geraden der »Nomogramme mit beweglichen Parallelen« durch eine Schar konzentrischer Kreise zu ersetzen.

3. Stechzirkel-Nomogramme. Tritt man unbeeinflußt durch den Begriff des allgemeinsten Nomogramms an die Frage heran, wie man den Steckzirkel nomographisch verwenden kann, so kommt man wohl ganz naturgemäß auf einen allgemeineren Typus des Stechzirkelnomogramms, der die Nomogramme mit äquidistanten Punkten von Gercevanoff als Sonderfall enthält. Bei der Darstellung dieses Typus, der uns im Schrifttum noch nicht begegnet ist, wollen wir Leitern (Skalen) von »Punkten mit zwei Bezifferungen« zugrunde legen. Es ist aber klar, daß man statt dieser Netze auch andere Punktemannigfaltigkeiten benutzen kann und daß man nach Möglichkeit mit einfach bezifferten Skalen, wie in Abb. 1, auszukommen suchen wird.

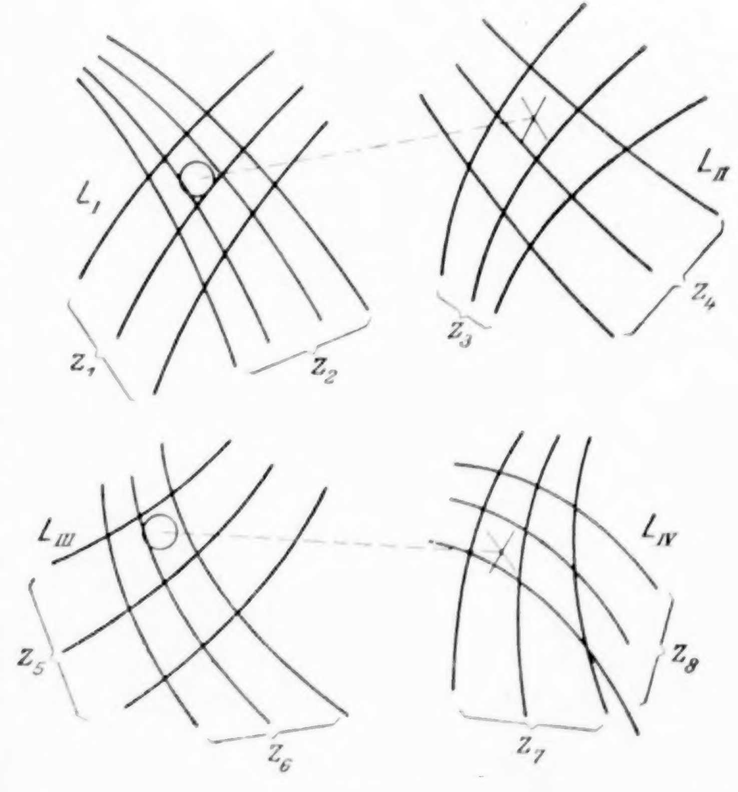


Abb. 2

Die Abbildung 2 besteht aus den vier Leitern L_I, L_{II}, L_{III}, L_{IV}, die in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y) durch folgende Gleichungen dargestellt sein mögen:

[1]) Adler August, Graphische Auflösung der Gleichungen der ersten vier Grade. Ztschr. d. österr. Ing.- u. Arch.-Ver. 42, 1890, S. 146.

[2]) Die Rechentafel zur reduzierten kubischen Gleichung, die R. Soreau in seiner »Nomographie« (Paris 1921, Bd. I, S. 371) bringt, stimmt genau mit Adlers Tafel aus dem Jahre 1890 überein. Nur ist das Koordinatennetz unmittelbar nach p und q beziffert, was aber für diesen Fall nur eine geringfügige Abweichung bedeutet.

$$L_I = \begin{cases} x_I = f_{1\,2} \\ y_I = g_{1\,2} \end{cases} \qquad L_{II} = \begin{cases} x_{II} = f_{3\,4} \\ y_{II} = g_{3\,4} \end{cases}$$
$$L_{III} = \begin{cases} x_{III} = f_{5\,6} \\ y_{III} = g_{5\,6} \end{cases} \qquad L_{IV} = \begin{cases} x_{IV} = f_{7\,8} \\ y_{IV} = g_{7\,8} \end{cases} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Hier wird in der Weise d'Ocagnes z. B. unter $f_{1\,2}$ eine Funktion der beiden Variablen z_1 und z_2 verstanden, unter $f_{3\,4}$ eine andere Funktion der Variablen z_3 und z_4, so daß in der Abbildung im ganzen 8 Variable $z_1, z_2, \ldots, z_8$ untergebracht sind, und zwar zwei bei jeder Leiter, deren erste L_I z. B. ein Netz aus z_1-Kurven und z_2-Kurven ist. Ist etwa z_8 gesucht, während $z_1, \ldots, z_7$ gegeben sind, so setzt man die eine Spitze des Stechzirkels, deren Stellungen in der Abbildung durch $\bigcirc$ bezeichnet werden mögen, in den Punkt (z_1, z_2) der Netzleiter L_I, die andere, deren Orte durch $\times$ bezeichnet werden mögen, in den Netzpunkt (z_3, z_4) der Leiter L_{II}. Dann hebt man nicht nur, wie bei Gercevanoffs Nomogrammen, eine, sondern beide Zirkelspitzen ab und setzt, ohne die Zirkelöffnung zu verändern, die Spitze $\bigcirc$ in den Punkt (z_5, z_6) der Leiter L_{III} und die Spitze $\times$ auf die mit z_7 bezifferte Netzkurve der letzten Leiter. Durch den Punkt, auf den man so stößt, geht eine Kurve der Schar (z_8), und die Bezifferung dieser Kurve gibt den Wert der gesuchten Variablen z_8 an. Da

$$(x_I - x_{II})^2 + (y_I - y_{II})^2 = (x_{III} - x_{IV})^2 + (y_{III} - y_{IV})^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

ist, so lassen sich durch diese Art von Stechzirkelnomogramm alle Gleichungen darstellen, die sich auf die Form

$$(f_{1\,2} - f_{3\,4})^2 + (g_{1\,2} - g_{3\,4})^2 = (f_{5\,6} - f_{7\,8})^2 + (g_{5\,6} - g_{7\,8})^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

bringen lassen. Gewisse der Variablen $z_1, \ldots, z_8$ können dabei einander gleich oder Konstanten sein.

Versucht man diesen Nomogrammtypus in d'Ocagnes Schema des allgemeinsten Nomogramms unterzubringen, so muß man beachten, daß es nicht erlaubt ist, bei derselben Benutzung ein Blatt oder eine Gruppe von Blättern, nachdem sie einmal eingestellt sind, noch in eine neue Lage zu bringen. Die Sache gelingt nur in der Weise, daß man sich die Abb. 2 in zwei Teiltafeln zerlegt denkt, deren erste aus den Leitern L_I und L_{II} besteht und auf einem weißen Blatt Π_1 gezeichnet ist, während die zweite aus den Leitern L_{III} und L_{IV} besteht und auf einem durchsichtigen Blatt Π_2 gezeichnet ist. Nun kann man vermittels der Doppelberührung $(z_5, z_6) \mid\!-\!\mid (z_1, z_2)$ und der einfachen Berührung $(z_7) \mid\!-\!\mid (z_3, z_4)$ die Ebene Π_2 auf die Ebene Π_1 einstellen und dann aus der Lösungsberührung $(z_8) \mid\!-\!\mid (z_3, z_4)$ die Unbekannte z_8 gewinnen.

Wegen der Verwendung eines mit Skalen bezeichneten durchsichtigen zweiten Blattes und der Notwendigkeit, Skalenpunkte auf Skalenpunkte einzustellen, wäre dieses Nomogramm, das übrigens für den Fall einfacher Leitern von Goedseels tatsächlich vorgeschlagen wurde und im Traité de Nomographie, S. 415 erwähnt und abgebildet ist, nicht gerade zu den einfachen Typen zu rechnen. Dagegen liegt bei Zulassung des Stechzirkels, an die Goedseels und d'Ocagne nicht gedacht zu haben scheinen, ein Typus einfachster Art vor: nur ein Blatt ist nötig, und es werden nur Punkte (die Zirkelspitzen) auf Skalenpunkte eingestellt. Es ist also zwar die Einschnürung der Stechzirkelmethode in die Zwangsjacke des allgemeinsten Nomogramms noch möglich, aber sie wird den spezifischen Vorzügen dieser Methode, die aus der Verwendung des Stechzirkels folgt, nicht mehr gerecht. Weiter unten sind Beispiele für die Anwendung der Stechzirkelmethode beigebracht. Für den einfachen Fall, daß alle vier Leitern der Abbildung 2 in eine einzige geradlinige logarithmische Leiter zusammenfallen, hat diese Methode des Skalenrechnens als Vorläuferin der modernen Benutzung des Rechenschiebers im 17. und 18. Jahrhundert bekanntlich eine große Rolle gespielt. Auch bei Galiläis »Proportionalzirkel«, den wir übrigens sogleich noch in anderer Hinsicht in die Betrachtung ziehen wollen, wurde mit dem Stechzirkel auf verschiedenerlei Skalen gerechnet.

4. Erweiterung des Nomogramm-Begriffs. Ließen sich die bisher erwähnten nomographischen Methoden, wenn auch nicht alle eben glücklich, wenigstens theoretisch noch im Begriff des allgemeinsten Nomogramms unterbringen, so kann man doch fragen, ob die Nomographie nicht solcher Erweiterungen fähig ist, daß man über d'Ocagnes Begriff des allgemeinsten Nomogramms hinausgeht. Solche Erweiterungen könnten vielleicht herbeigeführt werden durch Zulassung weiterer instrumentaler Hilfsmittel als Ablesegeräte, wobei allerdings auf größte Einfachheit, Handlichkeit und leichte Beschaffbarkeit Nachdruck gelegt werden muß. Hier käme etwa die Zulassung der gleich-

zeitigen Benutzung zweier Stechzirkel in Frage, vorausgesetzt, daß die Gleichungstypen, die hierbei erfaßt werden, praktisch wichtig und auf anderem Wege nicht bequemer erfaßbar sind. Aber man kann, in der mathematischen Formulierung wenigstens, auch ruhig bei d'Ocagnes durchsichtigen ebenen Blättern bleiben und über seinen Nomogrammbegriff dadurch hinausgehen, daß man den Operationen, die für diese Blätter erlaubt wurden, eine im Bereiche praktischer Möglichkeit liegende Erweiterung zuteil werden läßt. Ein Beispiel soll dies zeigen. Es seien 3 mit Skalen (im weitesten Sinne des Wortes) versehene Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 gegeben, wie sie im Begriff des allgemeinsten Nomogramms zur Anwendung kommen. Während nun beim allgemeinsten Nomogramm immer erst die Ebene Π_2 auf die Ebene Π_1 fest eingestellt wird, und dann erst die Ebene Π_3 auf die zu einem starren Ganzen verbundenen Ebenen Π_1 und Π_2, wollen wir uns folgendes vorstellen. Wir bringen einen Skalenpunkt von Π_2 zur Deckung mit einem Skalenpunkt von Π_1. Diese Doppelberührung läßt noch einen Freiheitsgrad zwischen den 2 Ebenen Π_1 und Π_2 übrig. Dann bringen wir in derselben Weise einen Punkt von Π_3 mit einem solchen von Π_2 in Berührung, und wenn wir dann endlich einen ebensolchen Punktekontakt noch zwischen Π_3 und Π_1 hergestellt haben, so sind durch 3 Doppelberührungen alle drei Ebenen fest miteinander verbunden, aber auf eine Weise, die bei d'Ocagnes allgemeinstem Nomogramm nicht erlaubt ist. Um die Aneinanderheftung der Ebenen Π_3 und Π_1 zu vollziehen, sind nämlich beide Ebenen gleichzeitig zu bewegen[1], während d'Ocagne immer nur eine Ebene nach der anderen zu bewegen erlaubt. Während manche Einstellungen, die nach d'Ocagnes Theorie zulässig sind, auf unüberwindliche Ausführungsschwierigkeiten stoßen würden, ist unser Verfahren in Sonderfällen sehr wohl zu verwirklichen. Reduziert sich etwa jede der Ebenen Π_1, Π_2, Π_3 auf eine geradlinige, bezifferte Funktionsskale, so lautet die Vorschrift beispielsweise so: Die Funktionsmaßstäbe (f_1), (f_2), (f_3) sind so zu einem Dreieck zusammenzulegen, daß zur Deckung kommen (Abb. 3): der Teilstrich 0 von (f_1) mit dem Teilstrich 0 von (f_2), der Teilstrich 0 von (f_3) mit dem Teilstrich α von (f_1) und der Teilstrich γ von (f_3) mit dem Teilstrich β von (f_2). Dieses Verfahren der nomographischen Dreiecksbildung liegt vor bei dem im 17. und 18. Jahrhundert verbreiteten Proportionalzirkel von Galiläi[2]. Daß bei diesem Gerät an die Stelle der dritten Skale (f_3) ein Stechzirkel tritt, dessen Oeffnung von einer Skale abgegriffen wird, ist eine technische Veränderung, die das mathematische Wesen nicht ändert, ebenso wie die nicht unbedingt notwendige Anbringung eines Gelenks (im Anfangspunkt der Skalen (f_1) und (f_2)) der Vorrichtung nicht die nomographische Natur raubt. Stattet doch auch d'Ocagne, wenn es nötig ist, seine Nomogramme mit Gelenken aus. Die Rechnungen bei Galiläis Proportionalzirkel werden dadurch ausgeführt, daß nach Bildung des Dreiecks aus (f_1), (f_2) und (f_3) die Skale (f_3) (der Stechzirkel) abgehoben und in eine neue Lage gebracht wird. (D'Ocagne würde hierfür eine vierte skalentragende Ebene Π_4 annehmen müssen.) Sind alle Skalen z. B. gleichförmige und die gebildeten Dreiecke gleichschenklige mit (f_1) und (f_2) als Schenkeln, so kann die Vorrichtung zur Aufsuchung der vierten Proportionalen, also auch zur Ausführung von Multiplikationen und Divisionen dienen, die die moderne Nomographie fast immer auf Skalen ausführt, von denen wenigstens eine ungleichförmig ist.

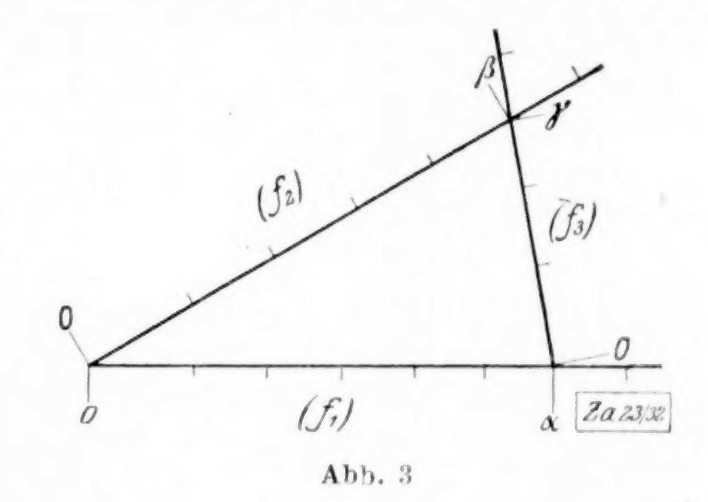


Abb. 3

[1]) Bei der Behandlung der Systeme mit doppelter Translation, die d'Ocagne in der zweiten Auflage des Traité (S 410) unter der Ueberschrift »Systeme mit zwei Freiheitsgraden« bringt, wird dieser Fall nicht betrachtet.

[2]) Daß Galiläi trotz seiner Erklärungen in der sprühenden Verteidigungsschrift gegen Capra nicht der erste Erfinder dieses Geräts sein kann, geht aus A. Favaros Untersuchungen hervor: A. Favaro, Galileo Galilei e lo Studio di Padova, Florenz 1883. Einen Einblick in das Wesen des Proportionalzirkels und in das ausgedehnte, von 1606 bis 1780 hierüber entstandene Schrifttum gibt Michael Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, neue, mit einer historischen Einleitung vermehrte Auflage von J. E. Scheibel, Breslau 1781.

Ueber den Begriff des allgemeinsten Nomogramms gelangt man auch hinaus, wenn man die oben behandelte Stechzirkelmethode in naturgemäßer Weise in der Sprache der durchsichtigen ebenen Blätter formuliert. Die eine Zirkelspitze wird durch eine durchsichtige, einen Punkt tragende Ebene Π_k ersetzt, die andere durch eine ebensolche Ebene Π_{k+1}. Nachdem Π_k und Π_{k+1} auf den Verband der früheren Ebenen $\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{k-1}$ eingestellt, also mit ihnen zu einem Verband $\Pi_1 \Pi_2 \ldots \Pi_{k-1} \Pi_k \Pi_{k+1}$ vereinigt sind, wird dieser Verband in die beiden Teilverbände $\Pi_1 \ldots \Pi_{k-1}$ und $\Pi_k \Pi_{k+1}$ zerrissen und diese beiden Teilverbände werden zu einem neuen Gesamtverband vereinigt, zu dessen Bezeichnung d'Ocagnes multiplikative Symbolik versagt. Die Verallgemeinerung dieses Verfahrens der Zerreißung in Teilverbände und ihrer Wiedervereinigung in neue Verbände braucht nicht ausgeführt zu werden.

Auch andere, beim allgemeinsten Nomogramm nicht vorgesehene Operationen der praktischen Geometrie, wie etwa die Teilung einer gegebenen Strecke in n gleiche Teile mit Hilfe eines Stechzirkels, sind vielleicht gelegentlich in der Nomographie verwendbar. Die Dreiteilung einer Strecke auf einem logarithmischen Maßstab liefert ja z. B. die dritte Wurzel. Im Grunde ist ein solches nomographisches Probieren eine Vertauschung von Einstell- und Lösungsberührungen: Die Lösungsberührung wird nach einem arithmetisch oder geometrisch geschätzten Wert eingestellt und dann so lange systematisch verändert, bis die Berührungen der gegebenen Werte stimmen.

Eine weitere, uneigentliche Vermehrung der nomographischen Darstellungsmöglichkeiten erhält man, wenn man ganz einfache numerische Operationen für zulässig erklärt. Man kann oft eine Gleichung $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ durch Einführung einer Hilfsvariablen α in zwei Gleichungen $f(z_1, z_2, \alpha) = 0$ und $g(z_3, z_4, \alpha) = 0$ zerfällen und für jede dieser Gleichungen ein besonderes Nomogramm zeichnen. Ist z. B. z_4 gesucht, so liefert das erste Nomogramm zu z_1 und z_2 den Wert von α, der als Zahl abgelesen und im Kopf behalten oder notiert wird. Das zweite Nomogramm liefert dann zu α und z_3 den gesuchten Wert z_4. Läßt es sich bequem so einrichten, daß α in beiden Nomogrammen dieselbe Skale bekommt, so pflegt man ja die Nomogramme zu einem einzigen zu verkoppeln und die α-Skale unbeziffert zu lassen (sie heißt dann bei den Fluchtentafeln Zapfenlinie). Aber wir denken hier an die Fälle, wo man die α-Leiter nicht für beide Nomogramme identisch machen kann. Und auch in Fällen, wo die Gleichung $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ nur in komplizierterer Weise durch ein einziges Nomogramm lösbar wird, wird man gelegentlich, statt in kunstvoller Weise ein rein nomographisches Verfahren auszuklügeln, im Interesse der Bequemlichkeit und manchmal auch der Genauigkeit lieber dem Verfahren den angegebenen numerischen Einschlag geben und so ein kompliziertes Nomogramm in zwei einfache zerfällen.

Während man hier einen Hilfswert α nur abliest, um mit ihm in eine neue Tafel einzugehen, bestände ein weiterer Schritt auf diesem Wege darin, daß man eine ganz einfache, im Kopf ausführbare Rechenoperation mit dem Hilfswert α gestattet, etwa die Addition $\alpha + 1 = \beta$, worauf man mit dem so gewonnenen Wert β in die neue Rechentafel eingeht, deren β-Leiter mit der α-Leiter der ersten Tafel zusammenfällt. Von dieser Art ist das von J. Hak in dieser Zeitschrift[1]) vorgeschlagene Verfahren. In Fällen dieser Art ist es zwar möglich, das Verfahren zu einem rein graphischen zu machen, das sich dem Begriff des allgemeinsten Nomogramms einordnet, und Hak tut dies auch bei seinem dritten Beispiel, aber es ist nicht immer vorteilhaft. Allerdings wird man doch wohl in Fällen wie den von Hak behandelten, besonders wenn das Nomogramm durch den Druck vervielfältigt werden soll, gern das Opfer der größeren Arbeit des Berechnens und Zeichnens bringen, wenn man dafür ein Nomogramm erhält, das in der Benutzung dauernd bequemer, klarer und einfacher ist, wie das bei Mehmkes Nomogramm für die Beleuchtung eines Flächenelements der Fall ist. Das punktweise Berechnen und Zeichnen einer krummlinigen Skale nach ihren rechtwinkligen Koordinaten macht nicht viel mehr Mühe, als das Berechnen und Zeichnen zweier einfacher Leitern.

Man kann noch weiter gehen und etwa die numerische Addition und Subtraktion gegebener Variablenwerte oder abgelesener Zwischenwerte oder auch die Benutzung beigegebener numerischer Tafeln mit nomographischen Operationen vermischen. Wenn solche gemischten Verfahren auch den Charakter der nomographischen Reinheit nicht

[1]) Bd. 1 (1921), S. 154 bis 157. Dieselbe Sache liegt bei dem Nomogramm Traité, 1. Aufl. S. 367 vor. D'Ocagne bemerkt dazu in der zweiten Auflage, S. 432 Anm., daß man ein solches Verfahren »ausnahmsweise« gestatten möge.

mehr tragen, so können sie sich doch als nützlicher erweisen, als ein hier gar nicht angebrachter Purismus in der Methode. Unterliegen gesuchte Größen einer numerischen Bedingung, so hat man zu probieren. Die bekannte Auflösung der quadratischen Gleichung mit dem Rechenschieber ist ein Beispiel hierfür. Ein anderes Beispiel ist die Aufsuchung der Winkel eines Dreiecks aus den Seiten mit dem Rechenschieber nach v. Hammer. Hier werden mit einem Schlage 3 Unbekannte α, β, γ durch Probieren unter numerischer Beobachtung der Gleichung $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ gefunden [1]).

Eine Ueberschreitung der für das »allgemeinste Nomogramm« gültigen Vorschriften liegt auch vor, wenn ein und dieselbe Variable bei mehr als einer Skale als Bezifferung vorkommt und diese Variable als Unbekannte auftritt. Denn dann ist die Einstellung nur durch ein Probieren möglich, bei dem schon vor vollendeter Einstellung Ablesungen zu machen sind. Man muß so lange verschieben, bis — im Falle von 2 solchen Skalen — auf beiden Skalen derselbe Wert getroffen wird. Das Ausziehen dritter Wurzeln mit einem gewöhnlichen Rechenschieber wäre ein einfaches Beispiel für dieses Verfahren. D'Ocagne lehnt dieses nomographische Probieren ab [2]), das übrigens auch zur Anwendung kommen müßte, wenn bei Gercevanoffs Nomogrammen die Variable der »Mittelpunktsskale« $((z_1)$ in Abb. 1) die Unbekannte ist.

Ein solches Probieren kann als ein Sonderfall der vorhin betrachteten nomographischen Methode mit numerischem Einschlag betrachtet werden. Bezeichnet man nämlich die Variablen der beiden Skalen, von denen vorhin die Rede war, mit z_i und z_k, so hat man numerisch die Bedingung $z_i = z_k$ einzuhalten.

5. Zusammenfassung. Beachtet man noch, daß im allgemeinen nicht eine Gleichung mit einer Unbekannten, sondern ein System von ν Gleichungen mit n Veränderlichen, von denen ν unbekannt sind, zu lösen sein kann, so lassen sich die besprochenen Erweiterungen des Nomogrammbegriffs folgendermaßen zusammenfassen:

1. Aus dem gegebenen System von ν Gleichungen mit n Variablen macht man unter Einführung von r passend zu wählenden neuen Variablen ein System von $\nu + r$ Gleichungen mit $n + r$ Variablen, von denen $\nu + r$ unbekannt sind. Diese $\nu + r$ Gleichungen sind teils sehr leicht zu rechnende numerische Gleichungen oder numerische Tabellen, teils sind sie nomographisch zu erfüllen.
2. Es ist nicht notwendig, daß in einem Verband von drei oder mehr Ebenen $\Pi_1\, \Pi_2 \ldots \Pi_{n-1}\, \Pi_n$ nach Abhebung der obersten Π_n ein (starrer) Verband $\Pi_1\, \Pi_2 \ldots \Pi_{n-1}$ übrig bleibt.
3. Ein Verband von Ebenen kann auseinander gerissen werden, falls er dabei in Teilverbände zerfällt, und diese können zu einem neuen Verband vereinigt werden.
4. Es darf probiert werden, d. h. eine Lösungsberührung oder mehrere solche können durch numerische oder geometrische Schätzung versuchsweise eingestellt und dann so lange systematisch verändert werden, bis die gegebenen Berührungen richtig eingestellt und die numerischen Bedingungen erfüllt sind.

6. Beispiele für Stechzirkelnomogramme. a) Gleichungen vom Typus

$$F(z_1) + F(z_2) + F(z_3) + F(z_4) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Auf Gleichungen von diesem einfachen Typ, die in den Anwendungen besonders oft auftreten, haben sich die Nomogrammentwerfer in den technischen Zeitschriften mit besonderem Eifer geworfen und haben dabei, obwohl es auch andere Darstellungsweisen gibt, fast immer zu den Nomogrammen doppelter Fluchtung gegriffen, die aus 4 parallelen, geradlinigen Skalen (z_1), (z_2), (z_3), (z_4) und einer ungeteilten, zu den Skalen parallelen Geraden, der Zapfenlinie, bestehen. Abb. 4 zeigt eine der Möglichkeiten, wie ein Stechzirkelnomogramm für diese Formel angelegt werden kann. Um einen beliebigen Fall herauszugreifen, sei angenommen, daß sich die Gleichung (5) in der Form

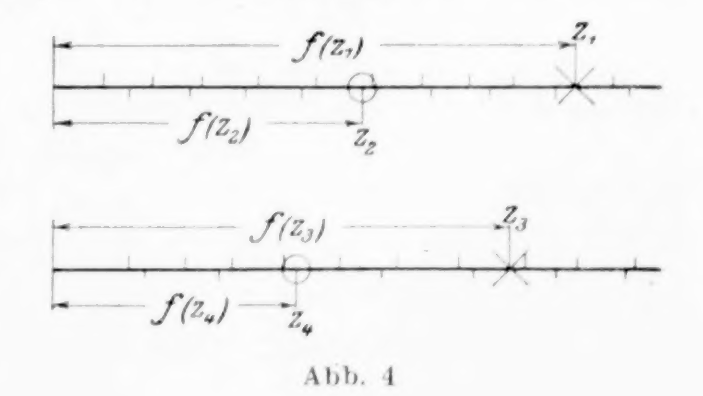


Abb. 4

$$f(z_1) - f(z_2) = f(z_3) - f(z_4) \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

[1]) E. Hammer, Ztschr. f. Vermessungsw. 51. 1922, S. 585 bis 593.
[2]) Calc. graph. et Nom. S. 336.

schreiben lasse, wobei die 4 Funktionen f, die im übrigen verschiedener Natur sein können, für die in Betracht kommenden Bereiche positiv sein mögen. Die Figur besteht aus zwei geradlinigen Doppelleitern. Die erste hat nach der einen Seite die Leiter $f(z_1)$, nach der anderen, von demselben Anfangspunkt aus, die Leiter $f(z_2)$. Auf dem anderen Leiterträger sind in derselben Weise die Leitern für $f(z_3)$ und $f(z_4)$ gezeichnet. Ist etwa z_4 gesucht, so greift man auf der ersten Doppelleiter die Strecke vom Teilstrich z_2 bis zum Teilstrich z_1 ab, setzt dann den Zirkel in z_3 ein und findet nun z_4 mit der anderen Zirkelspitze, und zwar links von z_3, wenn z_2 links von z_1 war, und rechts, wenn z_2 rechts von z_1 war. Die Lösung ist bequemer und genauer, als mit den Nomogrammen doppelter Fluchtung, und das Nomogramm nimmt viel weniger Platz ein als eines jener Art. Wenn also wirklich mit einer Abnutzung des Papiers durch den Stechzirkel gerechnet werden muß, so werden die Neuanschaffungskosten durch die Raumersparnis ausgeglichen, die es ermöglicht, verschiedene Nomogramme auf einem Blatt unterzubringen, das sonst nur für eine Rechentafel reicht[1]). Zur Schonung der Rechentafel und wenn kein Zirkel zur Hand ist, kann ja auch — und das gilt für alle Stechzirkelnomogramme — ein Papierstreifen benutzt werden, auf den man sich mit dem Bleistift die Strecke überträgt. Unter Umständen können die Skalen auch so angelegt und angeordnet werden, daß man sie ausschneiden und zu einem Schieber aus Papierstreifen zusammenlegen kann. Man kann mit den Papierstreifen ohne weiteres die Schieberrechnungen vornehmen, kann aber auch — immer im Hinblick auf den hohen Preis, der die Herstellung eines Sonderschiebers für die meisten Formeln unwirtschaftlich macht — an einen Holzschieber mit auswechselbaren Papierskalen denken.

b) Kubische Gleichung

$$z^3 + p z + q = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die oben erwähnten Stechzirkelmethoden von Adler zur Auflösung algebraischer Gleichungen erfordern die Anwendung einer aus zwei Geradenscharen bestehenden Skale von »Punkten mit zwei Bezifferungen«. Man wird aber nach Möglichkeit mit Tafeln auszukommen suchen, die keine solche Netze, sondern nur gewöhnliche Punkteskalen mit je einer Variablen enthalten. D'Ocagne bringt als Beispiel eine Tafel für die Auflösung der quadratischen Gleichung[2]). In Abb. 5 geben wir ein Nomogramm des Gercevanoffschen Typs für die Auflösung der reduzierten Gleichung dritten Grades (7). Die Tafel besteht aus je einer gewöhnlichen Skale für p, $|q|$ und $|z|$, und zwar liefert sie immer diejenige Wurzel z, deren Vorzeichen demjenigen von q entgegengesetzt ist.

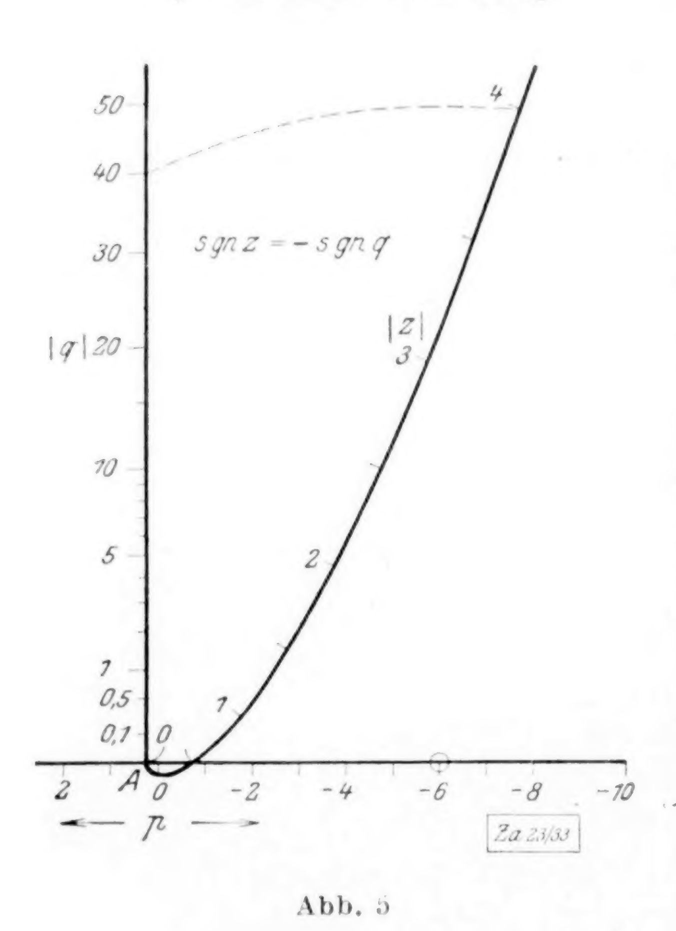


Abb. 5

Beispiel: Zur Lösung der Gleichung $z^3 - 6z + 40 = 0$ setzt man die eine Spitze des Stechzirkels in $p = -6$ ein, die andere in $|q| = 40$ und dreht den Zirkel mit dem so gewonnenen Halbmesser um $p = -6$ als Mittelpunkt, bis man die z-Skale trifft. Dies geschieht im Punkte $|z| = 4$. Also ist $z = -4$. Ebenso würde sich für die Gleichung $z^3 - 6z - 40 = 0$ die Wurzel $z = +4$ ergeben.

Sind die Gleichungen der 3 Leitern

$$L_1 = \begin{cases} x = f_1 \\ y = 0 \end{cases}, \qquad L_2 = \begin{cases} x = 0 \\ y = g_2 \end{cases}, \qquad L_3 = \begin{cases} x = f_3 \\ y = g_3 \end{cases} \quad . \quad . \quad (8),$$

so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Punkte $f_1|0$ und $f_3|g_3$ vom Punkte $0|g_2$ der »Mittelpunktsleiter« gleich weit entfernt liegen[3])

$$g_2{}^2 - f_3{}^2 - g_3{}^2 + 2 f_1 f_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

[1]) Bei der von der »Stugra« hergestellten Tafel »Konzentrationsänderung«, die fünf in gehörigen Abständen gezeichnete Skalen trägt, kann man die ganze Rechnung mit dem Stechzirkel als Streckenabtragung auf einer dieser Skalen, der zweiten, ausführen.

[2]) Calc. graph. et Nom. S. 350.

[3]) Calc. graph. et Nom. S. 348.

Die Gleichung (7) kann man nun auf verschiedene Arten auf die Form (9) bringen. In Abb. 5 wählten wir die Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{8} - \frac{p}{2}, & f_3 &= z, \\ g_2 &= \sqrt{-q}, & g_3 &= \sqrt{z\left(z - \frac{1}{2}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (10),$$

wobei unter den Quadratwurzeln nur deren positive Werte verstanden werden sollen. (Falls in der vorgelegten Gleichung q positiv ist, denke man sich in der Gleichung (7) z durch $z' = -z$ ersetzt. Man erhält dadurch eine neue Gleichung mit negativem q' und einer positiven Wurzel z', die auf eine negative Wurzel z führt.)

Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{p}{2}, & f_3 &= z \\ g_2 &= \sqrt{-q}, & g_3 &= z\sqrt{z - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

würden eine Darstellung verwandter Art ergeben.

Die in beiden Darstellungen vorkommende Kurve dritter Ordnung für die z-Skale ist fast ebenso schnell punktweise errechnet und gezeichnet wie die von Adler verwandte Parabel. In Abb. 5 ist der Punkt $|z|$ der $|z|$-Leiter auch bestimmt als Schnitt der Ordinatenparallele $x = |z|$, die durch den mit $\frac{1}{4} - 2|z|$ bezifferten Punkt der p-Leiter geht, mit dem um den Punkt $p = 0$ der p-Leiter zu beschreibenden Kreise, der durch den Punkt $|q| = |z|^3$ der $|q|$-Leiter geht, oder mit dem um den Punkt $p = -z^2$ der p-Leiter zu beschreibenden Kreise, der durch den Punkt $q = 0$ der $|q|$-Leiter geht. Hat man die p-Leiter und die $|q|$-Leiter gezeichnet, so kann man also die $|z|$-Leiter auch leicht durch Schnitte von Kreisen und Geraden punktweise gewinnen. Das Ableseverfahren mit dem Stechzirkel erscheint mir schärfer und bequemer als das mit dem Lineal bei d'Ocagnes Fluchtentafel, die übrigens in der Abhandlung von Bieberbach, diese Zeitschr. I, S. 65 abgebildet ist. Auch die relative Genauigkeit der z-Werte ist in Abb. 5 günstiger verteilt als bei der Fluchtentafel.

Bequem erhält man allerdings mit diesem Stechzirkelnomogramm immer nur die eine reelle Wurzel, deren Vorzeichen demjenigen von q entgegengesetzt ist. (Mit einigen Stechzirkelgriffen wären auch die beiden anderen Wurzeln, falls sie reell sind, aus Abb. 5 zu gewinnen.) Aehnliche Beschränkungen bringt die Stechzirkelmethode auch in anderen Fällen mit sich, wodurch sie gegenüber der Linealmethode im Nachteil zu sein scheint. Aber bei vielen praktischen nomographischen Aufgaben wird man nur eine Lösung, und noch dazu in einem begrenzten Bereich, finden wollen. Die Abb. 5 ist z. B. brauchbar, wenn nur eine reelle Wurzel vorhanden ist und nur sie gesucht wird. Sind die praktischen Forderungen andere, so tun sich auch neue Darstellungsmöglichkeiten analytisch auf. In Fällen, wo man z. B. gleich zwei reelle Wurzeln der reduzierten kubischen Gleichung (7) auf einmal mit dem Stechzirkel gewinnen möchte, könnte sich etwa die Darstellung

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{q}{2}, & f_3 &= \frac{1}{z} \\ g_2 &= \sqrt{-p + c}, & g_3 &= \sqrt{z^2 - \frac{1}{z^2} + c} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

brauchbar erweisen. In dieser Darstellung, wo wieder bei den Wurzelzeichen der positive Wert gemeint ist, kommen, wie früher, zwei geradlinige Skalen für p und q zur Anwendung. Dagegen ist eine Kurve vierter Ordnung Trägerin der z-Werte. Die theoretisch ganz willkürliche Konstante c ist praktisch so zu wählen, daß für die in dem jeweiligen Falle vorliegenden Bereiche der Variablen p, q und z die Größen g_2 und g_3 reell werden und eine günstige Form der graphischen Tafel ergeben.

c) Rauminhalt des Kegelstumpfs

$$v = \frac{\pi}{3} h (R^2 + R r + r^2) \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Abb. 6 ist ein Stechzirkelnomogramm für diese Formel, die sich der Fluchtlinienmethode gegenüber als spröde erweist. Anwendungsbeispiel: $R = 6$, $r = 4$, $h = 5$; gesucht v. Man greift in der Teilabbildung, die aus zwei unter 120° gegeneinander

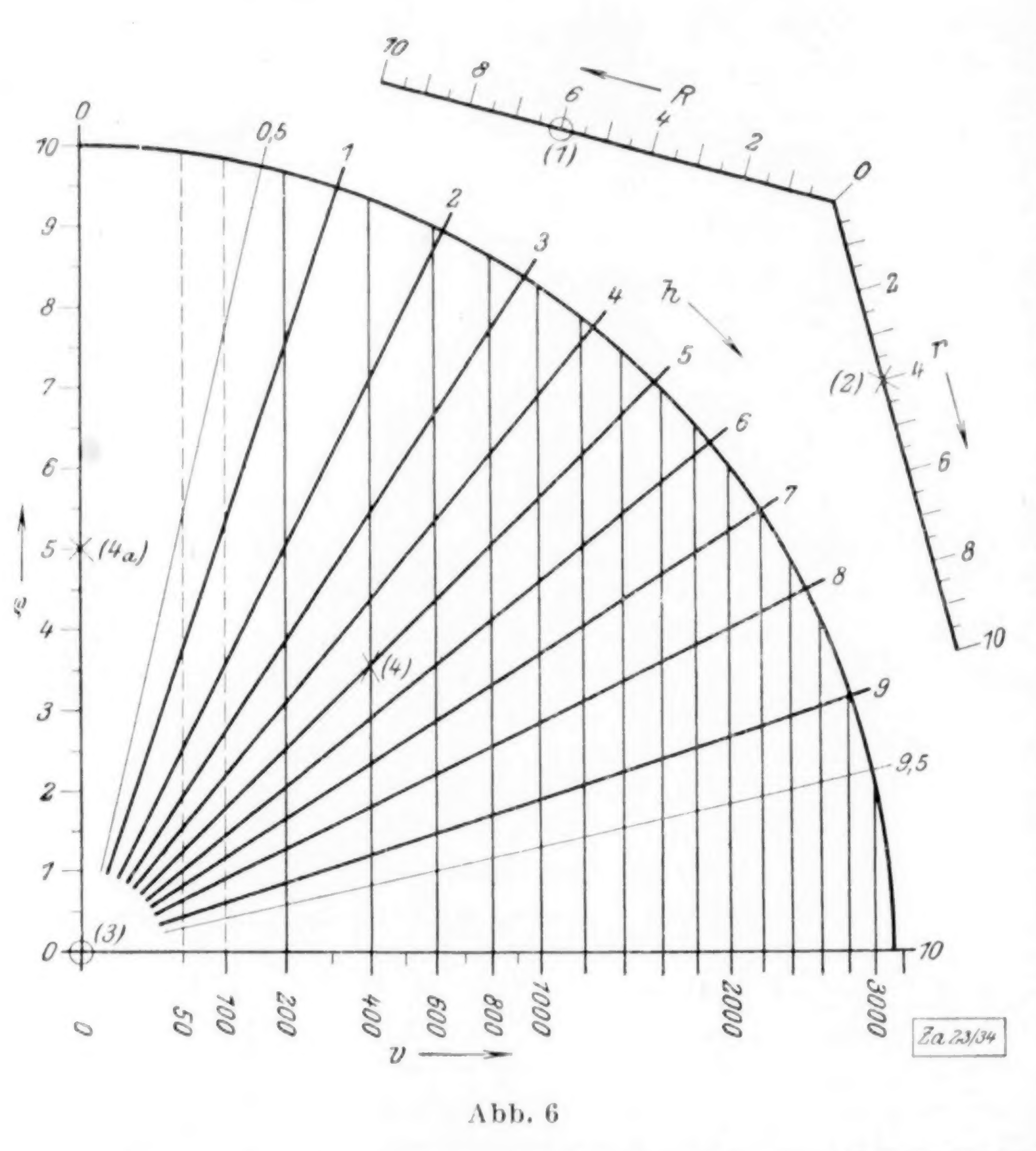


Abb. 6

geneigten gleichförmigen Skalen für R und r besteht, den Abstand der Punkte $R = 6$ (1) und $r = 4$ (2) mit dem Stechzirkel ab, setzt dann die eine Spitze ○ des Zirkels in den Nullpunkt der anderen Teilabbildung (3) und die zweite Spitze × auf den von diesem Nullpunkte ausgehenden, mit $h = 5$ bezifferten Strahl. Die durch den Ort (4) dieser zweiten Spitze hindurchgehende Ordinatenparallele ist mit dem gesuchten Wert $v \approx 400$ beziffert.

Sucht man den Halbmesser ϱ des dem Stumpfe inhalt- und höhengleichen Zylinders, so verfährt man zunächst gerade so, setzt aber zum Schluß die zweite Zirkelspitze × auf die Ordinatenachse (4a). In unserem Beispiele findet man für ϱ etwas mehr als 5.

Das Verfahren bedarf kaum der Erläuterung. In der ersten Teilabbildung hat man nach dem Cosinussatz die Zirkelöffnung $\sqrt{R^2 - R\,r \cos 120^0 + r^2} = \sqrt{R^2 + R\,r + r^2}$ abgegriffen; die zweite Teilabbildung ist vom Bau einer aus drei Linienscharen bestehenden Multiplikationstafel. Die aus konzentrischen Kreisen bestehende dritte dieser Scharen ist aber nicht eingezeichnet, da der Kreis jedesmal mit dem Stechzirkel in die Abbildung gelegt wird. Deshalb ist diese Teiltafel klarer und für Einschaltung (Interpolation) und Ablesung bequemer als eine gewöhnliche Kurventafel. Wenn eine Zirkelspitze in einem Zweikurvennetz ruht, so ist die Ablesung einfacher und schärfer, als wenn man einen Punkt in einem Dreikurvennetz suchen muß.

Will man die eine Zirkelspitze nicht immer, wie es hier geschieht, in dasselbe Loch setzen, so kann man die Netztafel auch anders anlegen. Dies ist in einer Netztafel des folgenden Beispiels geschehen.

d) Durchmesser und ideelles Biegungsmoment einer auf Biegung und Drehung beanspruchten Welle:

$$d = 10 \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0{,}35}{\pi\, k_b}\, M_b + \frac{32 \cdot 0{,}65}{\pi\, k_b} \sqrt{M_b^2 + \alpha^2 M_d^2}} \quad \ldots \quad (14),$$

$$M_i = 0{,}35\, M_b + 0{,}65 \sqrt{M_b^2 + \alpha^2 M_d^2} \quad \ldots \quad (15),$$

wobei

M_d = zu übertragendes Drehmoment in cm kg,
M_b = Biegungsmoment in cm kg,
α = Materialkonstante,
k_b = zulässige Beanspruchung in kg/cm^2,
d = Wellendurchmesser in mm,
M_i = ideelles Biegungsmoment in cm kg.

Auch hier sei ein Beispiel für die Anwendung der aus 4 Teiltafeln bestehenden Abb. 7 durchgeführt, und es mögen die den einzelnen Operationen in Klammern beigefügten Bemerkungen zur mathematischen Begründung dienen.

Beispiel: $M_d = 25\,000$ cm kg, $M_b = 15\,000$ cm kg,
$\alpha = 1{,}2$, $k_b = 500$ kg/cm^2.

Man setzt in der ersten Teiltafel die eine Zirkelspitze ○ in den Nullpunkt des Koordinatensystems (1) und die andere × in den Netzpunkt $M_d = 25\,000$, $\alpha = 1{,}2$ (2). (Dadurch hat man die Zirkelöffnung $\alpha\, M_d$ hergestellt.) Dann dreht man den Zirkel um den Nullpunkt, bis die Spitze × auf die Abszissenachse fällt (3). Hierauf setzt man unter Vergrößerung der Zirkelöffnung die erste Zirkelspitze ○ in den Punkt $M_b = 15\,000$ der Ordinatenachse (4) (Damit ist die Zirkelöffnung $\sqrt{M_b^2 + \alpha^2 M_d^2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten M_b und $\alpha\, M_d$ gewonnen.) Nun setzt man die eine Zirkelspitze × in den mit 0 bezifferten Punkt (5) der zweiten Teilabbildung, die aus einer Geraden mit einer gleichförmigen M_b-Skale besteht. Die andere Spitze ○ wird auf die linke Verlängerung der Geraden gesetzt (6). Während nun die Spitze ○ in ihrem Punkte (6) verbleibt, wird × unter Vergrößerung der Zirkelöffnung in den Punkt $M_b = 15\,000$ (7) weitergerückt. (Damit ist die vorige Zirkelöffnung um $\frac{35}{65} M_b$ vergrößert worden, so daß die Zirkelöffnung jetzt

$$x = \frac{35}{65} M_b + \sqrt{M_b^2 + \alpha^2 M_d^2}$$

beträgt.) Nun setzt man die eine Spitze ○ in den Punkt $k_b = 500$ der Ordinatenachse der dritten Teiltafel (8) und die andere × auf die durch diesen Punkt gehende Wagerechte. Die durch den so erhaltenen Punkt (9) gehende schräge Gerade gibt den gewünschten Wellendurchmesser $d = 82$ mm an. (Die dritte Teiltafel ist eine kartesische Geradentafel für die Formel $x = \frac{d^3\, \pi\, k_b}{10^3 \cdot 32 \cdot 0{,}65}$; nur sind die Parallelen zur Ordinatenachse $x =$ konst. nicht gezogen. Setzt man in diese Gleichung den oben gewonnenen Wert von x ein, so ergibt sich (14).)

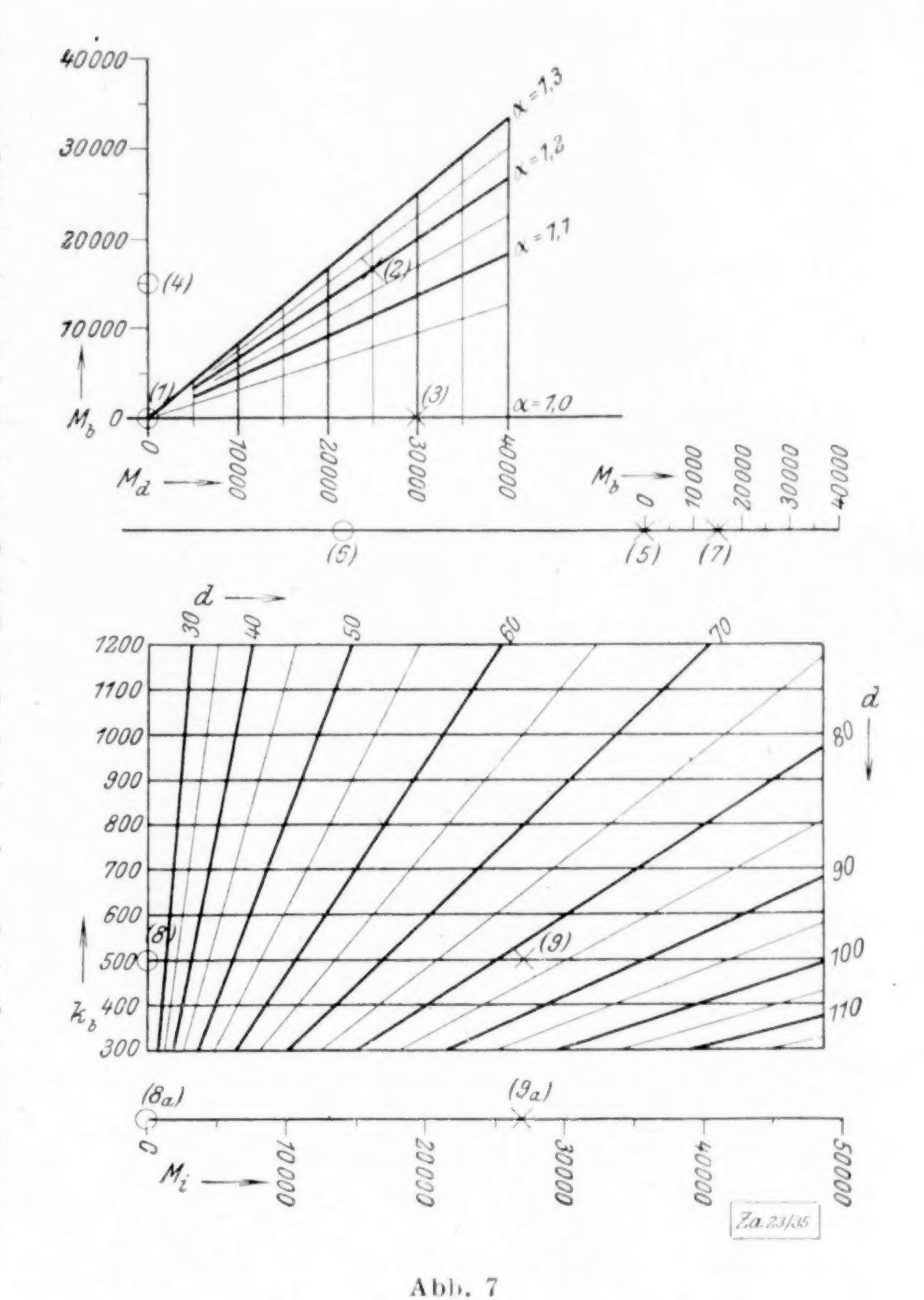


Abb. 7

Teiltafel	Zirkelspitze ○	Zirkelspitze ×
erste	1) 0,0	2) M_d, α
		3) X-Achse
	4) M_b	
zweite	6) linke Verlängerung	5) 0
		7) M_b
dritte	8) k_b	9) Wagerechte, Ablesung d
vierte	8a) 0	9a) Ablesung M_i

Schlüssel zu Abb. 7.

Sucht man das ideelle Biegungsmoment (15), so geht man mit der in der zweiten Teilabbildung gewonnenen Zirkelöffnung (x) so in die aus einer M_i-Skale bestehende vierte Teilabbildung, daß die eine Zirkelspitze ○ auf den Nullpunkt zu liegen kommt (8a). Die andere Spitze × zeigt dann auf der Skale den gesuchten Wert $M_i = 2700$ an (9a). (Der Maßstab dieser Leiter ist so gewählt, daß $0{,}65\, x = M_i$.)

Diese Zirkeloperationen, die in dem obenstehenden, als »Schlüssel« gedachten Täfelchen in leicht verständlicher Weise zusammengestellt sind, erscheinen in der Be-

Wellendurchmesser d mm

Nr. 6

Welle auf Biegung und Drehung.

Herausgegeben von der Betriebstechnischen Abteilung beim deutschen Verband wissenschaftlicher Vereine.
Schriftleitung Dipl. Jng. H. Winkel. Zu beziehen durch Betriebsschriftenzentrale, Berlin NW 7, Sommerstr. 4a. Jngenieurhaus.

Entworfen von Dipl. Jng. v. Dobbeler

Za 23/35

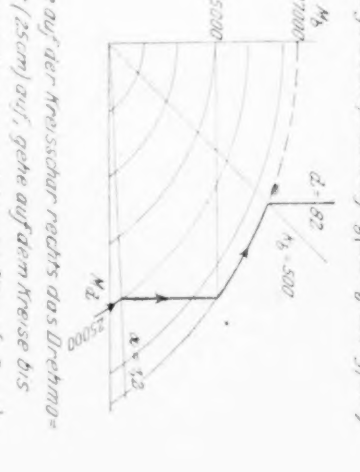
D.R.P.A. Copyright by Betriebstechnische Abteilung

Gebrauchsanweisung:

Gegeben:
Zu übertragendes Drehmoment: M_d (z. B. 25000 cmkg)
Biegungsmoment: M_b (z. B. 15000 cmkg)
Materialkonstante α_0 = (z. B. = 1,2)
Zulässige Beanspruchung k_b (z. B. k_b = 500 kg/cm²)

1) Suche auf der Kreisschar rechts das Drehmoment (25 cm) auf, gehe auf dem Kreise bis zum Schnittpunkt mit Strahl für α (z. B. 1,2) von dort senkrecht nach oben bis zum Schnittpunkt mit der Ordinate für das Biegungsmoment (M_b = 15000). Auf dem durch diesen Schnittpunkt gehenden Kreise bis zum Schnittpunkt mit der zulässigen Materialbeanspruchung. (Strahl k_b = 500 kg/cm²). Lies senkrecht über diesem Schnittpunkt den Wellendurchmesser d = 82 mm ab.

2.) Jst das ideelle Biegungsmoment gewünscht, so kann man den Kreis (vgl. punktierte Linie) weiter verfolgen und liest links M_i (= 27000 cmkg) ab.



3.) Jst M_d = 0, so sucht man links das M_b auf, verfolgt den Kreis bis zum Schnittpunkt mit Strahl k_b und liest oben d ab.

Abb. 8

schreibung umständlich, lassen sich aber rasch, bequem und genau ausführen. Sämtliche Teiltafeln sind geradlinige Skalen oder Netze, die aus nur zwei bezifferten Geradenscharen bestehen.

Die von v. Dobbeler für dieselbe Formel entworfene kunstvolle Netztafel[1] (Abb. 8) besteht aus 5 Scharen sich schneidender Linien. Bei einem Vergleich der Stechzirkeltafeln mit anderen Typen wähle man auch Beispiele mit Interpolationen und untersuche die größere oder geringere Ermüdung der Augen und Nerven bei längerer Arbeit mit der Tafel. Da in Abb. 7 die Variable M_b durch zwei Leitern vertreten ist, so ergäben sich Schwierigkeiten, wenn diese Größe gesucht wäre. Ein großer Vorteil für Entwurf, Herstellung und Benutzung der Linien- oder Netztafeln, zu denen v. Dobbelers Tafel gehört, ist es, daß sie allen stetigen Deformationen im Sinne der Analysis situs (Topologie) unterworfen werden können. Die Fluchtentafeln vertragen noch alle homographischen Abbildungen, während die Stechzirkelnomogramme — und das ist ein Nachteil —, abgesehen von Vergrößerungen und Verkleinerungen, im allgemeinen keine Formwandlungen zulassen. In einfacheren Fällen sind auch hier Deformationen in bestimmten Richtungen möglich. So kann die rechteckige Teiltafel von Abb. 7 in der Ordinatenrichtung beliebig deformiert werden. Z. B. kann man ihren unteren Teil in dieser Richtung von einer gewissen Abszissenparallele an dehnen, um die d-Linien steiler zu machen.
223

KURZE AUSZÜGE

Elastizität und Festigkeit.

Torsion von Stäben mit kreuzförmigem Querschnitt. Für den Verdrehungswinkel zweier Querschnitte eines Stabes, die um die Längeneinheit entfernt sind, hat St. Venant für Walzeisenprofile eine Näherungsformel vorgeschlagen

$$\vartheta = M / G J \quad \text{wo} \quad J = F^4 / 40\, \Theta_p \quad . . (1),$$

in der M das Drehmoment, G den Schubmodul, F die Fläche und Θ_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes bedeuten. A. Föppl gelangte in früheren Arbeiten zu einer Näherungsformel, in der er die von ihm als Drillungswiderstand benannte Größe

$$J = \frac{1}{3} \Sigma\, l d^3 \quad . . . . (2)$$

setzt. In dieser Formel bedeuten l die Lang- und d die Schmalseite eines Rechtecks. Die Summe ist über alle Rechtecke zu erstrecken, in die man sich das Querschnittsprofil des Walzeisens in erster Näherung zerlegt denken kann. Beide Formeln liefern für gewisse Querschnitte nahezu übereinstimmende Werte, für andere treten größere Abweichungen auf. Zu den letzteren gehört der kreuzförmige Querschnitt. A. Föppl ließ (Z. d. V. d. I. 66, S. 827 bis 828, 1922) deshalb mit Stäben von solchem Querschnitt Verdrehversuche machen. Der Schubmodul wurde erst mit einem Quadratstab aus Eisen bestimmt. Darauf hin wurde aus demselben ein Stab mit einem kreuzförmigen Querschnitt herausgehobelt und dessen Drillungswiderstand ermittelt. Es ergab sich, daß man mit einem Berichtigungsfaktor von 1,29 bis 1,15 den Verdrehungswinkel nach der Formel (2) berechnen kann, während die St. Venantsche Formel größere Abweichungen lieferte. Da die Formel (2) für schmale Einzelrechtecke gilt, mußten die Abweichungen bei Kreuzquerschnitten mit großer Dicke größer ausfallen. Nach Verminderung der Wandstärke und des Ausrundungshalbmessers der Hohlkehlen verminderte sich der Berichtigungsfaktor.

Biegungsschwingungen umlaufender Turbinenscheiben. Bei großen Dampfturbinen sind infolge der durch die Resonanz verstärkten seitlichen Erzitterungen der rasch umlaufenden und aus ihrer Ebene heraus federnden Scheiben schwere Betriebsstörungen und Beschädigungen vorgekommen. Mit diesen Biegungsschwingungen einer kreisförmigen Scheibe haben sich Stodola, Lamb und Southwell beschäftigt. Im Gegensatze zu der schon von Gustav Kirchhoff behandelten Scheibe konstanter Dicke bietet die Aufgabe der Bestimmung der Eigenschwingungszahlen einer mit einer Welle fest verbundenen und umlaufenden Turbinenscheibe wegen ihrer veränderlichen Dicke und der starreren Kranz- und Nabenverstärkung große Schwierigkeiten. R. V. Southwell berechnet in einer kürzlich erschienenen Arbeit (Proc. of the Roy. Soc. A. Vol. 101, S. 133—154, 1922) die Eigenfrequenzen einer Scheibe gleicher Dicke für gewisse von Kirchhoff noch nicht behandelte Sonderfälle der Randbefestigung. Zur Berücksichtigung des versteifenden Einflusses der Radnabe bestimmt er die Dauer der Eigen-

[1]) Tafel Nr. 6 der Betriebstechnischen Abteilung des Ausschusses für wirtschaftliche Fertigung.

schwingungen einer ruhenden Scheibe, die in einem innern Kreise fest eingespannt ist, während ihr äußerer Rand sich frei bewegen kann. Sie ergeben sich ihm aus der schon von Kirchhoff angegebenen Differentialgleichung der schwingenden Kreisplatte. Zur Befriedigung der Grenzbedingungen auf dem inneren und äußeren Kreis sind alle vier, von Kirchhoff aufgestellten partikularen Lösungen in Form von Produkten Besselscher Funktionen des Radiusvektors mit trigonometrischen Funktionen des Polarwinkels zu berücksichtigen, was eine ziemlich verwickelte Bestimmungsgleichung für die Frequenzen ergibt, deren Wurzeln er durch Probieren findet. Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn der Durchmesser des Einspannungskreises unbegrenzt verkleinert wird. Dies führt zur Betrachtung einer in einem Punkt festgehaltenen schwingenden Scheibe.

Die Annahme einer ruhenden Scheibe läuft also darauf hinaus, die Wirkung der Zentrifugalkräfte auf die Schwingungen zu vernachlässigen. Ein zweiter Grenz- oder Sonderfall bietet sich in der Vernachlässigung der Biegungssteifigkeit bei einer rotierenden Scheibe. Durch die Voraussetzung einer unendlich biegsamen Scheibe erniedrigt sich die Ordnung der Differentialgleichung um zwei. Die Aufstellung einer Lösung gelingt durch die hypergeometrische Reihe. Der Verfasser versucht schließlich die kombinierte Wirkung der Biegungssteifigkeit und der Zentrifugalkräfte durch Anwendung des Verfahrens von Lord Rayleigh (Ritz) zu bestimmen. Wenn man die bekannte Arbeit von A. Stodola über die Biegungsschwingungen umlaufender Turbinenräder veränderlicher Dicke (Schweizerische Bauzeitung, Zürich 1911, 1. Hälfte, S. 112) zum Vergleich heranzieht, wird man wohl sagen müssen, daß dem Verfasser die Bestimmung ihrer Eigenfrequenzen in dem analytisch leichteren Falle der Scheibe konstanter Dicke in weniger befriedigender Weise gelungen ist.

Einen **zusammenfassenden Bericht über die Biegungsprobleme der rechteckigen Platte** enthält die Schrift von H. M. Westergaard und A. Slater: »Moments and stresses in slabs« (Proceedings of the American concrete institute, 17, 124 S., 1921), die mit der Unterstützung des Bureau of Standards in Washington herausgegeben wurde. Nach einer historischen Uebersicht, welche die Literatur zur Plattentheorie von Lagrange und Navier bis 1921 enthält, werden die Ergebnisse ihrer jüngeren Bearbeiter vergleichend zusammengestellt, wobei im allgemeinen eine recht gute Uebereinstimmung der auf verschiedenen Wegen ermittelten Zahlen sich ergeben hat. Im Anschluß an eine Arbeit des Dänen Nielsen macht Westergaard von der Differenzenrechnung Gebrauch, die er auf den Biegungsfall der Pilzdecke anwendet. Er berechnet den Verlauf der Momente in einer gleichmäßig belasteten, durchlaufenden Decke, die in einem quadratischen Gitter von Punkten unterstützt ist. Um ferner die Einspannung der kontinuierlichen Platte in den Säulenköpfen zu berücksichtigen, denkt er sich auf die Platte um die Säulen eine Ringlast aufgebracht, bis die Tangenten der verbogenen Fläche auf einem Kreise in eine Ebene fallen. Zum Vergleich der Spannungskurven für die Punktstützung führt er eine Arbeit von Lavoine an, der diesen Belastungsfall durch trigonometrische Doppelsummen im Jahre 1872 dargestellt hat. Mit Rücksicht auf die Anwendung im Eisenbetonbau hat Westergaard einen Teil seiner Momentenkurven unter der die Rechnung vereinfachenden Annahme einer verschwindenden Querdehnung ermittelt.

Zur Beurteilung der Tragfähigkeit ihrer durchlaufenden Decken und der zweckmäßigsten Art ihrer Bewehrung haben die amerikanischen Ingenieure in der ihnen gewohnten großzügigen Art, ehe ihnen rechnerische Grundlagen zur Verfügung standen, zahlreiche Belastungs- und Festigkeitsversuche an mehrfelderigen Deckenkonstruktionen in den Gebäuden angestellt. Sie bedienten sich bei diesen Versuchen gewisser Dehnungsmeßgeräte, die an der Decke angebracht werden können und es gestatten, die Spannungen an jeder Stelle der Decke festzustellen. Die Verfasser zählen in ihrem Bericht mehr als zwei Dutzend derartiger Festigkeitsversuche auf, die an durchlaufenden Deckenkonstruktionen in Gebäuden gemacht wurden.

In der Materialprüfungsanstalt der Technischen Hochschule zu Stuttgart sind umfangreiche **Holzprüfungen** im Hinblick auf die Bedürfnisse des Flugzeug- und des Kraftwagenbaues mit Mitteln der Robert Bosch-Stiftung gemacht worden, über deren bisherigen Ergebnisse R. Baumann im Heft 231 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (1922, 139 S. mit 13 Tafeln und 221 Aufnahmen nach der Natur) ausführlich berichtet. Mit der mechanischen Prüfung der verschiedenen Holzarten — es wurden so ziemlich alle als Bauholz in Betracht kommenden Arten der in- und ausländischen Laub- und Nadelhölzer zur Untersuchung herangezogen — parallel ging die Beobachtung ihres Gefüges in Dünnschliffen im durchfallenden Licht. Die Versuchskörper wurden sowohl aus gerade gewachsenem und fehlerfreiem, als auch aus krummgewachsenem Holz mit Fehlerstellen und Aesten entnommen. Als Versuchskörper dienten meist Balken mit rechteckigem Querschnitt, die in ihrer Mitte belastet wurden. Die Dehnungszahl wurde nach dem Hookeschen Gesetz aus der gemessenen federnden Durchbiegung berechnet, was sich — solange die Belastung ein bestimmtes Maß nicht übersteigt — als zulässig erwies. Da die Druckfestigkeit des Holzes im allgemeinen kleiner als seine Zugfestigkeit ist, beginnt der Zerstörungsvorgang beim Biegungsversuch meist auf der Druckseite, was von diesem Augenblick an eine Störung des linearen Spannungsverlaufes im Querschnitt zur Folge hat. Die meisten Biegungsversuche wurden mit Stäben

von 50—100 cm Länge und 5—10 qcm Querschnitt, also mit Rücksicht auf die wechselnde Stellung der Jahrringe zur Stabachse, mit verhältnismäßig großen Probekörpern gemacht, was sich sowohl für ihre Herstellung als auch für die Zwecke der Erlangung von Durchschnittswerten der Festigkeitszahlen praktisch erwies. Der Unterschied im elastischen Verhalten des Holzes, je nach der Richtung, in der es beansprucht wird, ist durch Versuche mit einigen Holzarten zahlenmäßig ebenfalls sorgfältig festgestellt. Die Abhängigkeit der Druckfestigkeit von der relativen Lage der drei ausgezeichneten Wachstumsrichtungen des Holzes zur Druckrichtung wird für die Gotthardtanne in einem räumlichen Koordinatensystem dargestellt. In einem besonderen Abschnitt findet der Holz-Konstrukteur Wissenswertes über den Unterschied zwischen Kern- und Splintholz hinsichtlich ihrer Festigkeitseigenschaften, über das Raumgewicht als Gütemaßstab, über den Einfluß eines schrägen oder gekrümmten Faserverlaufes, der Verwachsungen, der Aeste, der Harzgallen, des Feuchtigkeitsgehaltes und anderer Eigenschaften des Bauholzes auf seine Festigkeit. Der umfassende Bericht wird durch zahlreiche Abbildungen prachtvoller Dünnschliffe der verschiedensten einheimischen und exotischen Holzarten, sowie durch eine ausgewählte Reihe von schönen Bildern ihrer Maserung und der Bruchstücke der Versuchskörper in 221 Aufnahmen auf 13 Tafeln ergänzt.

Die Beanspruchung in Betonfundamenten. In einem auf der Tagung des deutschen Betonvereins gehaltenen bemerkenswerten Vortrage beschäftigt sich Prof. W. Gehler mit diesem aktuellen Thema (Bauingenieur 1922, 3. Jahrg., S. 421—427 und 456—462). Der Entwurf der Betonfundamente von schweren Hochbauten richtete sich bisher meist nur nach praktischen Gesichtspunkten, in denen die Rücksicht auf die Bodenbeschaffenheit maßgebend war. In Betonklötzen, auf denen Schornsteine von Großkraftwerken errichtet waren, sind Risse aufgetreten, die die Standsicherheit der 100 m hohen Essen gefährdeten. Diese Körper hatten ein Achteck zur Grundfläche, das in ein Quadrat von 15 m Seitenlänge eingeschrieben war, und eine Höhe von beinahe 6 m; die gewaltigen Gründungskörper bildeten abgestumpfte Pyramiden. Um die Ursache der Risse und die zulässigen Belastungen der gedrungenen Körper zu bestimmen, knüpft Gehler einerseits seine Betrachtungen an die Theorie von L. Prandtl über den plastischen Zustand und die Druckversuche des Referenten mit keilförmigen Körpern aus Flußeisen an. Daneben hat er eine Reihe sehr bemerkenswerter Druckversuche mit ähnlich geformten, abgeschrägten Körpern aus verschiedenen spröden Baustoffen, wie Zement, Zementmörtel, Sandstein und Gußeisen angestellt, deren Bruchformen sorgfältig beobachtet und beschrieben werden. Eine Nutzanwendung dieser Beobachtungen bilden sodann lehrreiche Bruchversuche mit Modellkörpern von der Gestalt der in den Schornsteinfundamenten verwendeten Gründungskörper. Die Ueberlegungen Gehlers zielen dahin, die Grundgedanken der Prandtlschen Theorie auf die spröden und insbesondere auf den Bruchvorgang gedrückter, gedrungener Körper zu übertragen.

Die Beschädigungen des in ungünstiger Weise ausgenutzten großen Stampfbetonblockes waren radiale Risse, die sich über seine ganze Höhe erstreckten. Der Untergrund bestand aus wechselnden Schichten von Ton und Letten in schiefer Lagerung. Als eine Ursache der Rißbildung wurde die neuerliche Zuführung des Grundwassers nach dem Absenken erkannt. Es brachte die weichen Schichten zum Gleiten. Bei den Modellversuchen wurden diese Verhältnisse nach Möglichkeit nachgeahmt, mit dem Erfolg, daß die auf ein Bett von wechselnden Schichten von Lehm und von sandigem Lehm aufgepreßten Probekörper in ganz ähnlicher Weise zerbarsten. Die Bruchform zeigte einen von der ringförmigen oberen Druckfläche ausgehenden Kegel, der den um ihn stehengebliebenen Kranz zersprengte. Eine Durchfeuchtung des Untergrundes verminderte die Druckfestigkeit der Versuchskörper um ein Sechstel, ein Ergebnis, das Gehler durch die herabgeminderten radialen Reibungskräfte, die in der unteren Fläche wirken, aufklärt. Eine weitere Versuchsreihe bezog sich auf die Beanspruchung von plattenförmigen Fundamenten. Ihre Abschätzung bietet im Vergleich zu den blockförmigen geringere Schwierigkeiten. Es handelt sich um kreisförmige Platten, die durch die Bodenpressungen und durch eine Ringlast auf Biegung beansprucht und dem entsprechend zu armieren sind. Die Einzelheiten der sinnreichen Modellversuche, in denen die für die Beanspruchung maßgebenden Verhältnisse nachgeahmt, sorgfältig geprüft und weitgehend aufgeklärt wurden, dürften zu manchen wertvollen Anregungen Anlaß geben.

Die Eisenbetonröhren, die man wegen ihres billigeren Herstellungspreises als Ersatz für eiserne Rohre für die Zuleitungen des Druckwassers in Niederdruckkraftanlagen verwendet hat, sind neuerdings soweit verbessert worden, daß man sie auch für Innendrucke bis zu 10 Atm. bauen kann. Wie einer Arbeit von H. Mees (Bauingenieur, 3. Jahrg. S. 469—472, 1922) zu entnehmen ist, sind im Materialprüfungsamt in Stuttgart mit vier Eisenbetonröhren, von denen zwei auf einen Druck von 5 Atm. und zwei auf einen Druck von 10 Atm. berechnet waren, Festigkeitsversuche unter Innendruck gemacht worden. Die Rohre für 10 Atm. hatten einen inneren Durchmesser von 700 mm und eine Wandstärke von 250 mm; der Betonquerschnitt verhielt sich zum Eisenquerschnitt wie 2500 zu 58. Die Bewehrung bestand aus einigen Längseisen und aus nach Schraubenlinien gewundenen Rundeisen im inneren und äußeren Mantel. Bis auf einen Fehlversuch hielten die Rohre den Betriebsdruck ohne Anstände zu zeigen, aus. Die

ersten Undichtheiten wurden auf dem Außenmantel unter 16 (bezw. 18) Atm. beobachtet, bei 20 (bezw. 22) Atm. waren sie so groß, daß die Versuche abgebrochen werden mußten.

Um die geeignete **Beschaffenheit des Flußeisens für eine gute Schmelzflammenschweißung** klarzustellen, ließ die Firma Julius Pintsch A.-G. in Fürstenwalde eine ausgedehnte Reihe von Versuchen vornehmen, über die Dr.-Ing. e. h. C. Diegel im Heft 246 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens berichtet. Die Prüfung erstreckte sich auf die Eignung des Flußeisens für die autogene Schweißung und der zum Schweißen benutzten Eisendrähte.

Die Blechtafeln wurden in zahlreiche Streifen zersägt, diese — soweit sie geschweißt werden sollten — in der Mitte durchschnitten und die Stücke, nachdem ihre Enden beiderseits abgeschrägt waren, unter der Schmelzflamme zusammengeschweißt. Zur Schweißung dienten Drähte aus schwedischem Puddeleisen oder aus Flußeisen. Mit den Versuchskörpern wurden vergleichende Kaltbiegeproben, Zerreiß- und Verdrehungsversuche gemacht. Die Schweißnähte wurden außerdem an zahlreichen Stellen anpoliert, geätzt und ihre Beschaffenheit unter dem Mikroskop beobachtet. Zur Untersuchung standen drei Flußeisensorten zur Verfügung: ein zur Schweißung geeignetes Flußeisen, ein Flußeisen mit 0.3 vH Silizium und eines mit 0.25 vH Nickel. Der geringe Gehalt an Si erwies sich bereits als schädlich für die Güte der Schweißnähte. Diese gelangen am besten mit dem nickelhaltigen Eisen. Merkwürdig war, daß das durch Schlackeneinschlüsse verunreinigte schwedische Puddeleisen sich als ein bei weitem geeigneteres Schweißmittel erwies, als die homogenen Flußeisendrähte. Es wurden daraufhin eine ganze Reihe verschiedener Schweißdrähte aus Eisen auf ihre Eignung mit dem Ergebnis geprüft, daß das Gelingen und die Güte der Naht in weit höherem Maße vom Material des Schweißdrahtes als von der Art des zu schweißenden Bleches abhängig sind. Die mit den geschweißten Streifen vorgenommenen Zerreißversuche ergaben ungefähr dieselbe Zugfestigkeit wie die Zerreißversuche mit nicht geschweißten Streifen. Im Kleingefüge der Schweißstellen waren aber schwarze Trennungslinien zu beobachten, die als Einschlüsse oder als Risse erkannt wurden.

E. A. Fessenden und J. Bradford haben zur Klärung ähnlicher Fragen bei Behältern für Druckflüssigkeiten mit geschweißten **zylindrischen Gefäßen** Festigkeitsversuche ausgeführt. (Mech. Eng. Sept. 1922 S. 581—586). Von den verschiedenen Typen solcher Gefäße gelangten unter anderen ein 12 zölliges Eisenrohr (mit $^1/_4$ Zoll Wandstärke) mit einer geschweißten Längsnaht und zwei mit ihrer konvexen Seite gegen das Innere des Gefäßes gerichteten gewölbten Böden, deren Krempen nach dem Erhitzen durch Hämmern an die Zylinderenden angeschweißt waren, ferner ein nahtloses Rohr mit zwei in der Schmelzflamme angeschweißten nach außen gewölbten Böden, zur Untersuchung. Die Gefäße wurden durch hydraulischen Druck geprüft. Trotzdem die geschmiedete Rundnaht nach ihrer Fertigstellung auf einen kleineren Durchmesser gestaucht wurde, bewährte sie sich nicht. Der nach innen konvexe Boden verwandelte sich unter dem wachsenden Druck allmählich in einen nach außen gewölbten Deckel, bei welchem Vorgang der Durchmesser in der Krempe sich wieder aufweitete und das Material in ihr außerordentlich ungünstig beansprucht wurde. Das Rohr mit den in der Schmelzflamme stumpf angeschweißten Böden, die ihre gewölbte Seite nach außen kehrten, hielt höheren Drucken stand. Diese Konstruktion eines auf Innendruck beanspruchten zylindrischen Gefäßes dürfte der anderen vorzuziehen sein, weil bei ihr die schwächste Stelle, nämlich die Rundnaht entfernter von den gewölbten Teilen liegt, in denen die zusätzlichen Biegungsspannungen der abgebogenen Wandung sich bereits bemerkbar machen.

Die Grundsätze des autogenen Schweißens hat S. W. Miller auf Grund jahrelanger Erfahrungen zusammengefaßt. (Mech. Ing. Juni 1922 S. 360—368.) Zur Schweißung eignet sich nach seinen Angaben ein sehr weiches Flußeisen mit einem Gehalt von höchstens 0.15 vH Kohlenstoff, 0.60 vH Mangan, 0.05 vH Schwefel und 0.04 vH Phosphor. Man hat mit kohlenstoffreicherem Eisen, wie es beispielsweise in den Blechen des Schiffbaues verwendet wird, keine guten Erfahrungen beim Schweißen gemacht. Die beiderseitige Schweißung, bei der die Fuge von beiden Seiten angeschnitten wird und der Blechquerschnitt vor dem Verschweißen ein doppeltes V bildet, hat sich, wo sie angängig ist, besser bewährt als die einseitige (einfaches V). Durch die ungleichmäßige Erhitzung der Gefäße entstehen große Eigenspannungen in der Umgebung der Schweißnähte, die eine der Ursachen für die in den angeätzten Schliffen beobachteten Risse bilden. Sie lassen sich durch ein teilweises Ausglühen der Gefäße in der Umgebung der Naht nach ihrer Herstellung beseitigen. Obgleich die Festigkeit sorgfältig geschweißter Nähte die des unbeschädigten Materials erreichen kann, ist es empfehlenswert sie mit einem Sicherheitsfaktor zu versehen. Die Schweißstellen zeigen schon bei ihrer oberflächlichen Untersuchung alle Spuren der gewaltsamen Verschmelzung.

Göttingen. A. Nádai. 218

KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber die Ableitung der Differentialgleichung der schwingenden elastischen Membran. Die Differentialgleichung für die Schwingungen einer ebenen, an ihrem Rande eingespannten Membran wird gewöhnlich im Rahmen der Elastizitätstheorie abgeleitet. Doch wird manchem eine direkte Ableitung erwünscht sein. Die Membran möge bloß kleine Schwingungen machen, und zwar so, daß in jedem Punkte der Membran die Flächennormale nur wenig von der Ruhelage abweicht. Die Spannung, bezogen auf die Längeneinheit, sei P; e die Massendichte, bezogen auf die Flächeneinheit. Ich betrachte nun ein Flächenelement der Membran während der Bewegung; dieses möge als kreisförmig angenommen werden (Abb. 1). Die während

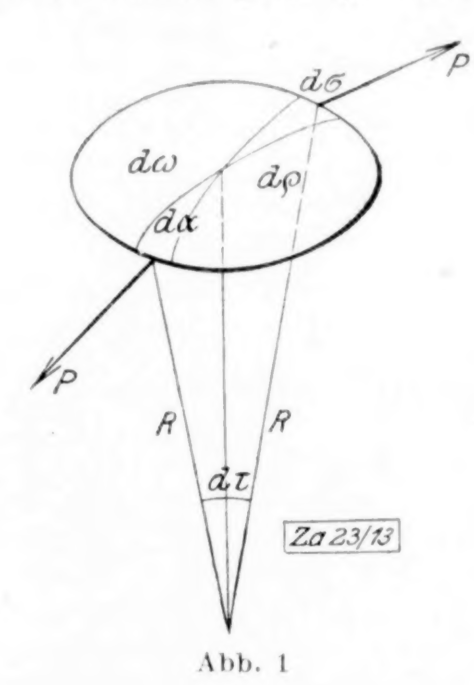


Abb. 1

der Bewegung längs der Membranoberfläche wirkende Spannung darf als konstant gelten, da die Membran sich aus ihrer Gleichgewichtslage nur sehr wenig entfernt; man denke an die ähnlichen Verhältnisse bei der schwingenden Saite. $d\varrho$ sei der Radius des kreisförmigen Oberflächenelementes, $d\sigma$ ein Element des Umfanges, R der Krümmungsradius eines Normalschnittes, $d\tau$ der Kontingenzwinkel. Dann ist die an $d\sigma$ wirkende Spannung $P d\sigma$, und deren Komponente längs der Flächennormalen $P d\sigma \sin \frac{d\tau}{2} = P d\sigma \frac{d\tau}{2}$. Die diametral gegenüberliegende Spannung P erzeugt dieselbe Komponente; gibt also zusammen $P d\sigma\, d\tau$ oder, da $2\, d\varrho = R\, d\tau$ und $d\sigma = d\varrho\, d\alpha$ ist,

$$2 \frac{P\, d\varrho\, d\sigma}{R} = 2 \frac{P\, d\varrho^2}{R}\, d\alpha \quad \ldots\ldots (1).$$

Nun gilt nach dem Satz von Euler über die Krümmungsradien R der Normalschnitte einer Fläche, wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien sind:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2};$$

dies in (1) eingesetzt, ergibt für die gesamte auf das Flächenelement in Richtung des Normalen wirkende Kraft:

$$2\, P\, d\varrho^2 \int_0^{\pi} d\alpha \left[\frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}\right]$$

$$= 2\, P\, d\varrho^2 \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] = P\, d\omega \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] \quad (2).$$

Hier ist $d\omega$ die Flächengröße des kreisförmigen Elementes.

Nun ist nach den Lehren der Flächentheorie, wenn p, q, r, s, t die bekannten Abkürzungen für die partiellen Derivierten sind,

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+q^2)\, r - 2\, pq - s + (1+p^2)\, t}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

da die Membran nur Oberflächenformen annehmen soll, die sehr wenig von der xy-Ebene abweichen, so ist $p = q = 0$ zu setzen, also kommt

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Sei nun u die Exkursion des Flächenelementes, dann ist $e\, d\omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ gleich zu setzen der bewegenden Kraft, also dem Ausdruck (2), der dann lautet:

$P\, d\omega\, (r + t)$ oder, da $r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{P}{e}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right].$$

Dies ist aber die bekannte partielle Differentialgleichung der schwingenden Membran.

Noch eine Folgerung der Gleichung (2) möge erwähnt werden. Eine Seifenlamelle von gegebener Begrenzung sei im Gleichgewicht; dann wirken längs der Oberfläche auf jedes Teilchen die Molekularspannungen; also muß in jedem Punkte einer derartigen Lamelle der Ausdruck (2) null sein; also

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0;$$

das heißt, die mittlere Krümmung muß null sein; dies charakterisiert eine derartige Fläche als Minimalfläche.

Dortmund. W. Merten. 221

Ueber die Verbrennung in der Dieselmaschine. Es sei hier gestattet, kurz auszuführen, daß man sich über den jeweiligen Zustand des Gemisches während des Verbrennungsvorganges in einem Dieselmotor ein — allerdings nur sehr angenähertes — Bild machen kann, wenn man die Beziehungen zwischen eingespritzter und verbrannter oder verdampfter Oelmenge aufsucht. Freilich müssen auch hier recht kühne und vorläufig unbelegte Annahmen gemacht werden.

Die eingespritzte Oelmenge sei abhängig von der Zeit durch die Linie y gegeben (Abb. 1) und der Zustand zur Zeit t_1 ins Auge gefaßt. Im Zeitelement dt wurde die Menge dy eingespritzt, von der bis t_1 inzwischen ein Teil verbrannt ist. Nimmt man an, alle Tropfen hätten bei der Einspritzung gleichen Radius r_1 und würden während der ganzen Zeit gleich schnell verbrennen [was wegen der wechselnden Temperatur und der Verkleinerung des Rauminhalts der Tropfen, ferner wegen der Sättigung der Verbrennungsluft mit Verbrennungsgasen gewiß nicht genau der Fall ist], so kann man die Verbrennungszeit für jeden Tropfen gleichbleibend z setzen. Bei dieser Vereinfachung ergibt sich, daß zur Zeit t_1 von dy die Menge $\frac{t_1 - t}{z} dy$ verbrannt ist, solange $t_1 < z$ bleibt.

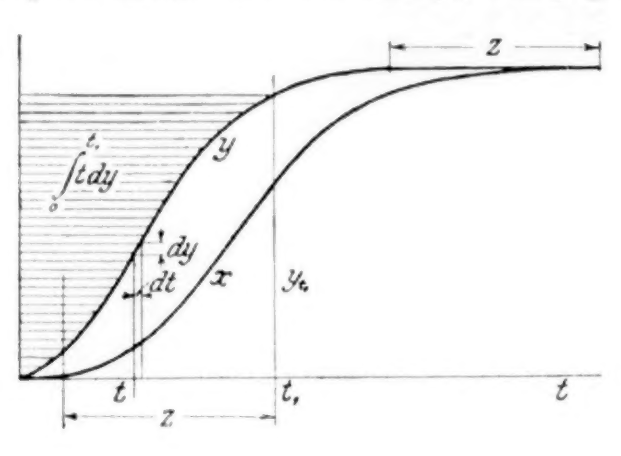


Abb. 1

Bis t_1 ist dann im ganzen die Menge:

$$x_{t_1} = \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t}{z}\, dy = \frac{t_1}{z}\, y_1 - \frac{1}{z} \int_0^{t_1} t\, dy$$

verbrannt.

Zur Zeit $t_1 = z$ wird: $x_z = y_z - \frac{1}{z} \int_0^z t\, dy.$

Diese Werte lassen sich zeichnerisch darstellen. Wird dann $t_1 > z$, so sind im ganzen verbrannt:

$$x_{t_1} = y_{t_1 - z} + \int_{t_1 - z}^{t_1} \frac{t_1 - t}{z}\, dy = \frac{t_1}{z}\, y_{t_1}$$

$$- \left(\frac{t_1}{z} - 1\right) y_{t_1 - z} - \frac{1}{z} \int_{t_1 - z}^{t_1} t\, dy\,.$$

Wird endlich y mit Ende der Einspritzung gleichbleibend, so ergibt sich nach: $t_1 > t_e$

$$x_{t_1} = \frac{t_1}{z}\, y_e - \left(\frac{t_1}{z} - 1\right) y_{t_1 - z} - \frac{1}{z} \int_{t_1 - z}^{t_e} t\, dy\,.$$

Für $t_1 - z = t_e$ wird $x = y_e$.

Man kann so die Linie für das verbrannte Gemisch näherungsweise verzeichnen. Nimmt man auch die Verdampfungsgeschwindigkeit gleichbleibend an und für die Verdampfung eines Tropfens die Zeit z', so gelten ähnliche Beziehungen. Damit kann man sich ein Bild über die Verteilung der Tropfengrößen im Gemisch machen.

Zur Zeit t_1 ist von dy nur mehr flüssig: $\frac{z' - t_1 + t}{z'} dy$, die Tropfen also vom Radius r_1

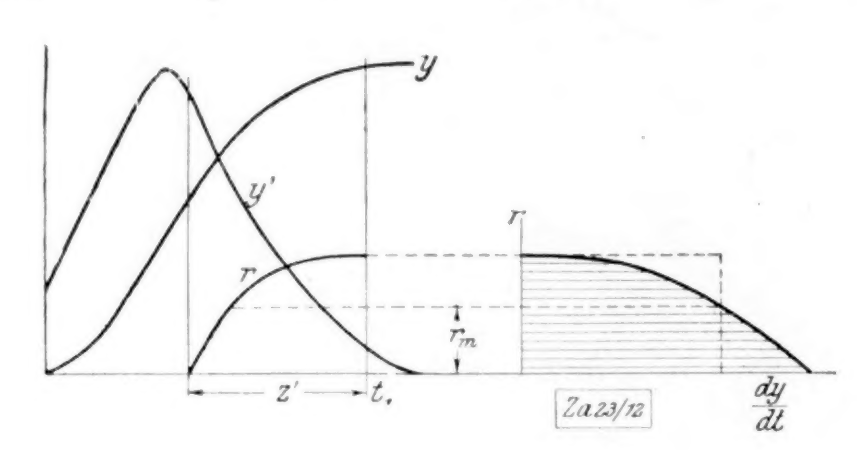


Abb. 2

auf $r = \sqrt[3]{\frac{z' - t_1 + t}{z'}}\, r_1$ vermindert. Man kann so die Linie für r verzeichnen, während die zugehörigen Oelmengen dy durch $\frac{dy}{dt} = y'$ dargestellt werden können (Abb. 2). Man bekommt also in jeder Ordinate zusammengehörige Werte von dy und r und kann so ein Bild der Verteilung und den Mittelwert der Radien oder auch der Oberflächen und Rauminhalte der Tropfen herstellen. Dies kann sinngemäß leicht für $t_1 > z'$ und $t_1 > t_e$ ausgedehnt werden, so daß auch der Verlauf der Mittelwerte in der Zeit dargestellt werden kann.

Man sieht, daß die Verdampfung und Verbrennung des einzelnen Tropfens vorerst studiert werden muß, wenn man zu einem feineren Einblick gelangen will, womit Neumann in einer früheren Arbeit (Ztschr. des Ver. deutscher Ing. 1918) bereits begonnen hat.

Prag. K. Körner. 204a

Segelflug und Aehnlichkeitsgesetz. Die jüngsten Erfolge im Segelflug legen zwei Fragen nahe, eine theoretische und eine praktische, deren Beantwortung hier kurz angedeutet sei. Die erstere geht dahin, wie sich die tatsächlich erwiesene Möglichkeit stundenlangen Segelfluges zu der auf Aehnlichkeitsbetrachtungen gestützten Voraussage von Helmholtz (1873) verhält, wonach es als »kaum wahrscheinlich« gelten müsse, daß der Mensch sein eigenes Gewicht durch Muskelkraft in die Höhe zu heben und dort zu erhalten vermag[1]). Denn — so wird man schließen und dies leitet auch zu der zweiten Frage über — die Energiebilanz des natürlichen Vogelfluges, auf die die Helmholtzsche Untersuchung zurückgeht, beruht ja auch wesentlich auf der Möglichkeit des langdauernden

[1]) Monatsber. d. Kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. 1873, S. 501 bis 514.

Segelns. Die praktische Frage aber, die sich jedem aufdrängen muß, der auf der einen Seite die motorlosen Flüge, auf der andern die vielhundertpferdigen Flugzeuge zur Beförderung weniger Personen sieht, ist die: Welches ist das Minimum an Arbeitsleistung, das nach dem heutigen Stande der Technik zur dauernden Aufrechterhaltung wagrechten Fluges für einen Menschen erforderlich erscheint und wie weit ist dieses noch von dem Ausmaß an verfügbarer menschlicher Kraft entfernt?

Ich benutze die Gelegenheit, um die Aehnlichkeitsgesetze der Flugzeugbewegung in etwas allgemeinerer Form abzuleiten und auszusprechen, als dies gewöhnlich geschieht. Der Zusammenhang verschiedener Einzelsätze wird dadurch ein wenig aufgeklärt.

1. Das allgemeine Aehnlichkeitsgesetz.

Die hydrodynamischen Grundgleichungen setzen die auf die Masseneinheit entfallende äußere Kraft gleich einer Beschleunigungsgröße plus einer von der Zähigkeit herrührenden inneren Kraft. Von der Schwere der Luftteilchen darf man absehen. Die Beschleunigung hat die Dimension $v^2:l$, Geschwindigkeitsquadrat durch Länge, die Zähigkeitsspannung (Kraft pro Flächeninhalt) ist proportional dem Geschwindigkeits-Gefälle von der Dimension $v:l$, daher die Dimension der Zähigkeitswirkung auf die Masseneinheit $Zv:l^2$, wobei in die »Zähigkeitszahl« Z schon die spezifische Masse als Quotient eingegangen ist. Man hat demnach, wenn μ die Dichte der Flüssigkeit oder der Luft bezeichnet:

$$\left[\frac{\text{Kraft}}{\mu\, l^3}\right] = \left[\frac{v^2}{l}\right] + \left[\frac{Z v}{l^2}\right]$$

und nach Kürzung durch $v^2:l$:

$$\left[\frac{\text{Kraft}}{\mu\, v^2\, l^2}\right] = [1] + \left[\frac{Z}{v\, l}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

woraus man nebenbei erkennt, daß Z die Dimension von $v\,l$ oder cm^2/sec besitzt.

Andererseits wird die äußere Kraft den am Flugzeug auftretenden Kräften, Gewicht und Antriebskraft, gleichzusetzen sein. Wir wollen nun übereinkommen, zwei Körper dann dynamisch ähnlich zu nennen, wenn sie erstens in allen Teilen, einschließlich der Oberflächengestaltung, geometrisch ähnlich sind und zweitens die an entsprechenden Punkten angreifenden Kräfte sich nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden. Es stehen also inbesondere Gewicht und Antriebskraft bei beiden in gleichem Verhältnis zueinander, und wenn etwa γ das spezifische Gewicht der Körper bezeichnet, so ist dies zugleich ein Maß für die auf die Volumeinheit entfallende Triebkraft. Führt man danach in (1) für »Kraft« das Symbol $[\gamma l^3]$ ein, so erhält man

$$\left[\frac{\gamma\, l}{\mu\, v^2}\right] = [1] + \left[\frac{Z}{v\, l}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2),$$

und daraus das allgemeine Aehnlichkeitsgesetz der Flugzeugbewegung: An zwei dynamisch ähnlichen Flugzeugen (Vögeln) treten (unter entsprechenden Bedingungen) ähnliche Bewegungen auf, wenn erstens die reduzierte Geschwindigkeit $v.l/Z$ und zweitens der Quotient $\mu v^2:\gamma l$, wo μ die Dichte des Mediums, γ das spezifische Gewicht des Flugzeuges bezeichnet, in beiden Fällen gleiche Werte hat. Die Kräfte verhalten sich wie die Werte von γl^3 oder von $\mu v^2 l^2$ oder von $Z\mu v l$ oder von $Z^2\mu$.

Löst man die beiden Gleichungen

$$\frac{\mu\, v^2}{\gamma\, l} = \text{konst.}, \quad \frac{v\, l}{Z} = \text{konst.} \quad . \; . \; . \; (3)$$

nach v und l auf, so gewinnt man

$$v = \text{konst.} \sqrt[3]{\frac{Z\gamma}{\mu}}, \quad l = \text{konst.} \sqrt[3]{\frac{Z^2\mu}{\gamma}} \quad (4)$$

und damit die andere Form desselben Gesetzes: Die Bewegungen an dynamisch ähnlichen Flugzeugen sind ähnlich, wenn die dritten Potenzen der Geschwindigkeiten sich wie die Werte von $Z\gamma:\mu$, die dritten Potenzen der Längenabmessungen wie die $Z^2\mu:\gamma$ verhalten.

Als Beispiel diene etwa ein Paar von Flugzeugen gleicher materieller Beschaffenheit, die in freier Luft, in verschiedenen Höhen fliegen, so daß γ und Z unverändert bleiben, μ mit der Höhe abnimmt. Befindet sich das eine Flugzeug in Bodennähe, das andere etwa 3400 m hoch (Dichteabnahme rd. 30 vH), so muß das zweite um 10 vH geringere Längenabmessungen und um 10 vH größere Geschwindigkeit als das erste besitzen; die Antriebskraft des zweiten ist um 30 vH, die Flächenbelastung um 10 vH, der Leistungsbedarf um 20 vH verringert. Man wird aber nur selten von diesem allgemeinen Aehnlichkeitsgesetz Gebrauch machen, da es die Veränderlichen zu sehr beschränkt; sein eigentlicher Wert liegt darin, daß es wichtige Spezialisierungen nach zwei Richtungen zuläßt.

2. Das Helmholtzsche und das Reynoldssche Aehnlichkeitsgesetz.

Wenn man im Windkanal mit einem entsprechend gestützten Flugzeugmodell Versuche ausführt, so werden die auf dieses wirkenden Kräfte durch die Stützreaktionen aufgehoben und es entfällt daher die Gleichsetzung der dem Körper eingeprägten Kräfte, Gewicht und event. Triebkraft, mit den von der Flüssigkeit ausgeübten. Statt (2) hat man also nur (1) zu berücksichtigen und es entsteht die heute so vielfach angewendete Reynoldssche Modellregel: An zwei geometrisch ähnlichen, gestützten Modellen im Windkanal treten ähnliche Bewegungen auf, wenn die reduzierten Geschwindigkeiten $v.l/Z$ gleiche Werte haben; die Kräfte verhalten sich dann wie die Werte von $\mu v^2 l^2$. Wir verweilen nicht länger bei diesem geläufigen Sonderfall, sondern wenden uns dem von Helmholtz be-

trachteten zu, der auf die eingangs gestellten Fragen führt.

Erfahrungsgemäß hängen in dem praktisch in Betracht kommenden Bereich der reduzierten Geschwindigkeiten die Auftriebs- und Widerstandskräfte nur wenig von dem Wert der reduzierten Geschwindigkeit ab. Es mag hier dahingestellt bleiben, ob dies daher rührt, daß das Auftreten dieser Kräfte von der Zähigkeit nahezu unabhängig ist oder daher, daß die unmittelbare Wirkung erhöhter Zähigkeit anderweitig kompensiert wird. Jedenfalls begeht man keinen großen Fehler, wenn man für eine überschlägige Berechnung des Kräftespieles und der Energiebilanz an einem Flugzeug den Einfluß des letzten Gliedes in (2) außer Acht läßt. Auf diese Weise gelangt man zu der Helmholtzschen Modellregel: An zwei dynamisch ähnlichen Flugzeugen treten annähernd ähnliche Bewegungen auf, wenn in beiden Fällen der Wert von $\gamma l : \mu v^2$ derselbe ist; die Kräfte verhalten sich dann wie die Werte von γl^3 oder von $\mu v^2 l^2$. Nimmt man insbesondere an, daß die Flugzeuge gleiches spez. Gewicht haben und in Medien von gleicher Dichte fliegen, so erhält man die noch einfachere Aehnlichkeitsbedingung $v^2 : l =$ konst., d. h. die Geschwindigkeiten müssen sich wie die Wurzeln aus den Längenabmessungen verhalten; die Kräfte wachsen dann mit l^3, die Leistungen mit $l^3 v$ oder $l^{7/2}$.

Aus der letzten Beziehung schließt Helmholtz auf die Unmöglichkeit des motorlosen Menschenfluges. Er nimmt nämlich an, daß die körperliche Leistungsfähigkeit der tierischen Organismen dem Muskelgewicht proportional sei und setzt dieses dem gesamten Körpergewicht proportional. Demnach würde, ähnliche Bewegungen vorausgesetzt, die verfügbare Leistung mit l^3, die erforderliche mit $l^{7/2}$ wachsen, so daß die Flugfähigkeit im Verhältnis der Quadratwurzel aus der Längenabmessung oder der sechsten Wurzel aus dem Gesamtgewicht abnimmt. Der Storch, der ein ausdauernder Flieger ist, hat ein Körpergewicht von etwa 4 kg, d. i. $1/_{17}$ des Menschengewichtes; der Mensch müßte also nach der Helmholtzschen Auffassung den Wirkungsgrad des Flugmechanismus gegenüber dem des Storches $\sqrt[6]{17} = 1{,}60$ mal verbessern, um aus eigener Kraft fliegen zu können. An eine solche Verbesserung des Wirkungsgrades denkt Helmholtz nicht; in welchem Maße sie möglich ist, erkennt man an dem Beispiel des Fahrrades, durch das die natürliche Marschleistung des Menschen um ein Vielfaches erhöht wird.

3. Die Möglichkeit des motorlosen Fluges.

Aus den bekannten Gleichungen für den Auftrieb und Rücktrieb einer Tragfläche[1])

$$A = \zeta_a \mu F v^2, \qquad R = \zeta_r \mu F v^2 \quad . \; . \; (5),$$

(F Tragflächengröße, ζ_a, ζ_r Auftriebs- bezw. Rücktriebs-Beiwerte) folgt durch Gleichsetzung des Auftriebs mit dem Gewicht und des Rücktriebs mit der Antriebskraft für die erforderliche Triebleistung

$$L = R v = \zeta_r \mu F v^3 = \frac{\zeta_r}{\zeta_a^{3/2}} \sqrt{\frac{G^3}{\mu F}} \quad . \; . \; (6).$$

Der schädliche Widerstand ist einstweilen außer Acht gelassen und soll später berücksichtigt werden. Der günstigste Wert für die Koeffizienten-Verbindung $\zeta_r/\zeta_a^{3/2}$, der durch geeignete Formgebung der Flügel bisher erreicht wurde, ist etwa 0,08. Setzt man ferner für μ den in Bodennähe gültigen Wert $1/_8$, so wird aus (6):

$$L = 0{,}226\, G \sqrt{\frac{G}{F}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6'),$$

wo G in kg, F in m², L in kgm/sec. Für den Storch mit $G = 4$ kg, $F = 0{,}5$ m² ergibt sich daraus $L = 2{,}56$ km/sec. Nach Messungen von O. Lilienthal[1]) ist der Querschnitt des Storchkörpers etwa gleich 0,008 m². Stellt man diesen Querschnitt mit einem Widerstandsbeiwert von 0,2 in Rechnung, der den Verhältnissen an einem Flugzeugrumpf (unter Berücksichtigung der Anschlüsse usw.) entspricht, so erhält man einen schädlichen Widerstand gleich $1/_8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}008\, v^2 = 0{,}0002\, v^2$, und da sich mit $\zeta_a = 0{,}5$ aus der Auftriebsgleichung $v^2 = 128$ rechnet, schließlich für den zusätzlichen Leistungsbetrag $0{,}0002\, v^3 = 0{,}29$ kgm/sec. Danach hätte ein Storch, wenn er mit einer dem heutigen Stand der Flugtechnik entsprechenden Apparat ausgerüstet wäre, beim wagerechten Flug — ohne jede Unterstützung durch Segelwirkung — $2{,}56 + 0{,}29 = 2{,}85$ kgm/sec aufzuwenden.

Wie groß die tatsächliche Arbeitsfähigkeit der Vögel ist, läßt sich wohl kaum genau bestimmen. Nach Angabe von Popper-Lynkeus[2]) wiegen die Brustmuskeln des Storches 0,544 kg, was einer Leistung von 3,50 bis 4,76 kgm/sec entsprechen soll, gemäß einer Annahme von 6,43 bis 8,75 kgm/sec pro kg Muskelsubstanz. Nehmen wir das arithmetische Mittel 4,13 kgm/sec als richtig an, so wäre das das 1,45 fache des oben errechneten Wertes 2,85 kgm/sec. Danach wäre also die nach der Helmholtzschen Auffassung erforderliche Wirkungsgrad-Verbesserung nahezu erreicht und man müßte schließen, daß wir von der Möglichkeit des freien Menschenfluges zumindest nicht mehr weit entfernt sind. Daß es sich in der Tat anders verhält, kann in zweierlei Weise erklärt werden.

Bleiben wir zunächst dabei, die eben angeführte Zahl 4,13 für die Arbeitsleistung des Storches wäre annähernd richtig, dann müßte, dynamische Aehnlichkeit vorausgesetzt, der 17 mal schwerere Mensch etwa 70 kgm/sec, also nahezu eine Pferdekraft leisten. Davon kann aber keine Rede sein, wahrscheinlich ist mit einer Dauerleistung von mehr als 10 bis 15 kgm/sec nicht zu rechnen; dies stimmt auch

[1]) Vgl. z. B. meine Fluglehre, 2. Aufl. Berlin 1922, S. 34. — [2]) Der Vogelflug, 2. Aufl. München u. Berlin 1910, S. 151. — [3]) Der Maschinen- und Vogelflug, Berlin 1911, S. 47.

damit überein, daß die Brustmuskeln des Menschen ungefähr 0,8 kg, die beiden Wadenmuskeln ungefähr 1,4 kg wiegen. Die Helmholtzsche Voraussage würde sich also nur deshalb bestätigen, weil eine von Helmholtz stillschweigend gemachte physiologische Annahme bei weitem nicht zutrifft, nämlich die, daß Körper- und Muskelgewicht bei den verschiedenen Organismen einander proportional seien. Dazu kommt noch, daß der Mensch zu seinem Eigengewicht das nicht ganz unbeträchtliche Apparatgewicht mitnehmen muß, was das Verhältnis von Gesamtgewicht zu Muskelgewicht noch mehr verschlechtert.

Die andere Möglichkeit ist die, daß die Zahl 4,13 für die verfügbare Flugleistung des Storches stark übertrieben wäre. Dann kann man nicht behaupten, daß wir schon eine genügende Verbesserung des Wirkungsgrades erreicht haben, und muß den erforderlichen Leistungsbetrag unmittelbar bestimmen[1]). Nimmt man an, daß der 68 kg schwere Mensch noch 40 kg totes Gewicht mit sich in die Luft führt, so haben wir ein Gesamtgewicht von $108 = 4 \cdot 27$, also eine Linearvergrößerung 1:3 gegenüber dem Storch. Dem entspricht nach der Helmholtzschen Modellregel eine Leistungsvermehrung im Maßstab $1:27\sqrt{3} = 1:46,8$, so daß die beiden oben errechneten Bestandteile der Leistung eines Storches ergeben: $119,9 + 13,6 = 133,5$ kgm/sec. Diesen Betrag kann man aber dadurch herabdrücken, daß man die Tragflächengröße, unter Abweichung von der geometrischen Aehnlichkeit, verringert. Wählen wir statt dem 9 fachen von 0,5 m² etwa das 27 fache, d. i. $F = 13,5$ m², so vermindert sich der erste Summand nach (6′) im Verhältnis $\sqrt{3}:1$, der zweite zufolge der Gl. (5) im Verhältnis $3\sqrt{3}:1$, so daß man erhält $69 + 3 = 72$ kgm/sec. Bei einem Wirkungsgrad der Kraftübertragung von etwa 80 vH bedarf es demnach eines Aufwandes von 90 kgm/sec, d. i. mindestens sechsmal so viel als ein Mensch tatsächlich leisten kann.

Wenn nun aber in dieser Weise die menschliche Kraft nicht zur dauernden Ueberwindung des Tragflächen-Rücktriebes und schädlichen Widerstandes ausreicht, so folgt daraus noch nicht, daß motorloses Fliegen für den Menschen unmöglich wäre. Denkt man an eine einfache Einrichtung, die Arbeit zu akkumulieren gestattet, z. B. eine durch Pedale zu betätigende Luftpumpe, die in einen Windkessel fördert, so hat man gerade genug Kräfte, um sich $1/6$ der Zeit hindurch in ruhender Luft im Gleichgewicht zu erhalten. Nutzt man daneben die heute reichlich erschlossenen Möglichkeiten des Segelfluges aus, so wird man zu einer Form des Fluges gelangen, die von der des natürlichen Vogelfluges nicht allzu weit entfernt ist; denn auch die Vögel akkumulieren, wenn auch in anderm Sinne, Arbeit während des Segelns. Hier soll aber nochmals ausdrücklich betont werden, daß alle unserer Rechnung zugrunde gelegten Zahlen aufs äußerste günstig gewählt sind, so daß das rechnerische Ergebnis einen Idealfall, und jedenfalls nicht dem Durchschnitt technischer Ausführung entspricht. Zusammenfassend können wir sagen:

1. Die Helmholtzsche Schlußfolgerung, daß das Fliegen aus eigener Kraft für den Menschen unmöglich sei, ist nicht stichhaltig, weil sie einerseits die Verbesserung des Wirkungsgrades durch geeignete Konstruktion außer acht läßt, andrerseits aber auf einer unzutreffenden physiologischen Voraussetzung beruht.

2. Nach dem heutigen Stande der Technik ist motorloses Fliegen für den Menschen nur möglich, wenn es mindestens zu $5/6$ Segelflug und höchstens zu $1/6$ eigentlicher Kunstflug ist.

Mises. 269

BUCHBESPRECHUNGEN

Prof. Dr.-Ing. KURT **NEUMANN,** Hannover. Untersuchungen an der Dieselmaschine. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 245. 42 S. Verlag des Vereines deutscher Ingenieure, Berlin 1921.

Der Verfasser hat sich durch diese bedeutungsvolle Arbeit neuerlich ein großes Verdienst um die Erforschung der Vorgänge in der Dieselmaschine erworben, indem er den schon früher mehrfach angeregten Gedanken ausgeführt hat, durch Entnahme und Untersuchung von Gasproben aus kleinen Zeitabschnitten den Fortschritt der Verbrennung im Zylinder während der Einspritzung und Ausdehnung festzustellen. Durch Messung der Verbrennungs- und Einspritzluftmenge, der Zusammensetzung des Brennöls, der gesamten Oelmenge und der Einspritzquerschnitte konnten jeweils Innentemperatur und Wärmeabgabe an die Zylinderwandungen ermittelt werden. Freilich geht es ohne vereinfachende Annahmen doch nicht ganz ab, wenn deren Zahl und Bedeutung auch vermindert sind. Denn wenn man selbst annimmt, daß die Gasanalyse dem Zustand im Zylinder entspricht, wird noch bei der Bestimmung der verbrannten Oelmenge und der Temperaturen der im Gemisch

[1]) Daran, daß die Proportionalität zwischen Körper- und Muskelgewicht nicht zutrifft, braucht man keinesfalls zu zweifeln. Nach einer neueren Angabe von F. Zschokke, Der Flug der Tiere, Berlin 1919, S. 63, liegt für die Vögel das Gewicht der Flugmuskulatur durchschnittlich bei 24 bis 34 vH des gesamten Körpergewichtes und sinkt für die Silbermöve auf rd. 16 vH. Dagegen wiegen Waden- und Brustmuskel des Menschen zusammen höchstens 3 bis 4 vH des Gesamtgewichts.

vorhandene Oeldampf und bei der Berechnung des Wärmeübergangs auch die zur Bildung und Umwandlung desselben erforderliche Wärmemenge außer Acht gelassen. Man kann schließen, daß wohl die Temperaturen während und gleich nach der Einspritzung in der Tat etwas niedriger ausfallen und daß die Wärmeübertragung während dieser Zeit etwas gleichmäßiger verläuft. Das rasche Ansteigen der Wärmeübergangzahl kurz nach Beendigung der Einspritzung mag auch mit der Wärmestrahlung zusammenhängen. Auch der Verlauf der Wärmeübergänge während der Ansauge- und Verdichtungszeit, deren Bedeutung allerdings zurücktritt, dürfte bei Einhaltung der gefundenen Endwerte etwas anders vor sich gehen. Endlich sind die Annahmen gleichbleibender Ausflußbeiwerte und gleichbleibenden Mischungsverhältnisses bei der Einspritzung gemacht, um die Verbrennungsgeschwindigkeit und den Arbeitsverlust durch Wärmeabgabe berechnen zu können[1]).

Trotz dieser bei unseren heutigen Kenntnissen kaum vermeidlichen Ungenauigkeiten bietet die Untersuchung Neumanns einen bisher unerreicht guten Einblick in die Vorgänge in der Dieselmaschine, da die vorher verwendeten Methoden zur Bestimmung der Temperaturen, die der Unterzeichnete auch im Jahre 1913 versucht hat, wohl auch keine genaueren Ergebnisse liefern und nur einen allerdings wertvollen Vergleich bilden würden.

Prag. K. Körner. 204

[1]) Vgl. a. die Kleine Mitteilung S. 63 ds. Heftes.

Dr. Dr.-Ing. H. LORENZ, Geh. Reg.-Rat, o. Professor der Mechanik a. d. Technischen Hochschule zu Danzig. Das Verhalten fester Körper im Fließbereich. Hysteresis-, Nachwirkungs- und Ermüdungserscheinungen in mechanischen, magnetischen und elektrischen Kraftfeldern. Mit 25 Abbildungen im Text. Erweiterte Sonderausgabe aus der »Zeitschrift für Technische Physik« II. u. III. Jahrgang. Verlag von Johann Ambrosius Barth Leipzig 1922. 68 S.

Die vorliegende Schrift ist eine Sonderausgabe einiger Arbeiten die Lorenz 1921 und 1922 in der Zeitschrift für technische Physik veröffentlicht und in der vorliegenden Ausgabe mit erweiternden Zusätzen versehen hat.

Die erste der vier Arbeiten »Die Fließkurven fester Körper« (auch Ztschr. f. techn. Phys. 2 (1921) 271, 344) gibt, unter Zugrundelegung einer ganz bestimmten Vorstellung über die Vorgänge während der Deformation und des aus diesem Bilde folgenden Ansatzes eine zumindest qualitative Erklärung einer Menge längst bekannter Erscheinungen. Lorenz denkt sich den Körper aus einem Haufen regellos angeordneter, irgendwie zusammenhängender Kristalle bestehend, welche beim Fließvorgang eine Umlagerung erfahren. Diese Umlagerung soll in eine Verschiebung in der Kraftrichtung und in eine Drehung aus der ursprünglichen Ruhelage zerfallen. Die Verschiebung bedingt bloß elastische reversible Deformation, während die Drehung Ursache des Fließens ist. Der Lageänderung des Teilchens wirken der (von den äußeren Kräften unabhängig angenommene) Reibungswiderstand und eine elastische Richtkraft entgegen. Daraus bestimmt sich nach einigen Rechnungen die Gleichung der Fließkurve d. h. der Beziehung zwischen der Dehnung und der äußeren Kraft. Aus den Fließkurven läßt sich dann ziemlich viel ableiten: Die Existenz von Bereichen innerhalb deren sich alle Zustandsänderungen der Körper abspielen müssen, der Neigungswinkel der Bruchflächen, die Gleichungen bezw. Form der Entlastungskurven und Hysteresisschleifen, dann die Erklärung der elastischen Nachwirkung (bei Einführung der Abhängigkeit der Reibung von der Deformationsgeschwindigkeit) und schließlich die Ermüdung der Materiale durch Dauerbeanspruchung.

Wenn auch das Bild das Lorenz seinen Rechnungen zu Grunde legt, vielleicht nicht ganz mit dem tatsächlichen Vorgang übereinstimmt, so ist es gewiß höchst interessant zu wissen, wieviel sich mit einem derartigen Reibungsansatz überhaupt erreichen läßt.

Die zweite Arbeit »Ueber das Verhalten lockerer Massen« (Sand) kommt zu dem Ergebnis, daß alle lockeren Massen einen von Stoff und Korngröße unabhängige Böschungswinkel besitzen, solange die Sandkörner klein gegen die Abmessungen der Gesamtmasse sind.

In der dritten Arbeit »Magnetisierungskurven und Hysteresisschleifen« entwickelt der Verfasser, ganz analog zur ersten Arbeit, zunächst eine Vorstellung über den Vorgang im magnetisierbaren Körper während des Einwirkens des Erregerfeldes. Kleine Magnetpaare werden durch das Feld verdreht. Dieser Drehung wirken elastische und (vom Erregerfelde unabhängige) Reibungskräfte entgegen. Mit einer bestimmten Verteilung dieser Reibungskräfte lassen sich, in Uebereinstimmung mit der Erfahrung, Gleichungen für die Magnetisierungskurven und Hysteresisschleifen (symmetrische wie auch unsymmetrische) ableiten. Für schwache Induktionen liefert eine Näherungsrechnung den Hysteresisverlust $V = \eta \cdot \mathfrak{B}^{1.5}_{max}$, immerhin befriedigendes Ergebnis.

Der Schluß enthält einige Bemerkungen über die Anwendung der prinzipiell gleichen Ueberlegungen auf die Polarisation gewisser Dielektrika.

Wien. Erich Groß. 253

Dr. THEODOR VAHLEN, a. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Greifswald. Ballistik. Mit 53 Abbildungen. Vereinigung wissenschaftlicher Verleger Walter de Gruyter & Co. Berlin und Leipzig 1922. XI + 231.

Der Verf., der während des Krieges mit ballistischen Rechnungen im Deutschen Heeresdienst beschäftigt war, legt hier eine ausführliche zusammenfassende Darstellung der Ballistik vor. Sie bringt sowohl die mathematischen Ansätze der äußeren Ballistik und die eingehende Diskussion ihrer Lösungen und

Lösungsmethoden, wie auch die grundlegenden physikalischen Betrachtungen der inneren Ballistik nebst einigen Zusätzen aus der praktischen Schießtechnik. Trotz des verhältnismäßig geringen Umfanges hat der Verf. es verstanden, eine Vollständigkeit zu erreichen, die kaum etwas Wesentliches vermissen läßt. Dabei ist die Darstellung klar, leicht lesbar und durchaus jedem, der etwa die Ausbildung einer Technischen Hochschule genossen hat, zugänglich. Es ist ein großes Verdienst, aus der fast unübersehbaren halbwissenschaftlichen Literatur auf diesem Gebiete nicht nur das Wesentliche herausgefunden, sondern dafür auch eine von neuen Gesichtspunkten getragene, übersichtliche Stoffeinteilung geschaffen zu haben. Darüber hinaus ist eine große Zahl von neuen Resultaten namentlich in den Abschnitten über die äußere Ballistik eingestreut; sie betreffen vor allem die Berechnung der Flugbahn für große Höhen.

Um einen Eindruck von der reichen Fülle des Stoffes zu vermitteln, sei eine Reihe von in dem Buche behandelten Fragen kurz angedeutet. Nachdem die Bahnberechnungen in der üblichen Weise (aber viel sachgemäßer und übersichtlicher als gewöhnlich) behandelt wurden, werden Störungen der Flugbahn, insbesondere durch Tageseinflüsse also z. B. Wind, Regen, Bewegung des Geschoßstandes usf. besprochen. Es folgt eine Untersuchung der Flugbahn als nicht-ebene Kurve auf Grund der Differentialgleichung für die konische Pendelung. Unter der Ueberschrift »kosmische Ballistik« werden die Einflüsse der Luftgewichtsabnahme mit der Höhe, der Veränderung des Luftwiderstandes und der Schwere mit dem Ort usf. zusammengefaßt. Ein weiteres Kapitel ist der Berechnung des Dralls gewidmet, eine kurze Besprechung gilt der sog. Uebergangsballistik, d. i. der Phase vom Abfeuern des Geschosses bis zum Eintritt des Geschosses in die freie Flugbahn. In dem der innern Ballistik gewidmeten Kapitel werden die aus der bisherigen Literatur bekannten physikalischen Ansätze besprochen. Ein besonderer Abschnitt ist der ballistischen Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet, in dem die üblichen Begriffsbildungen der Statistik, die Streuung, Fehlerfortpflanzung usf. dargelegt werden.

Das Buch, zu dem man den Verfasser wie den Verlag beglückwünschen darf, wird nicht nur dem sachlich Interessierten gute Dienste leisten, sondern kann auch jedem Ingenieur und jedem Physiker als musterhafte Darstellung eines schön durchgearbeiteten, abgeschlossenen Problemkreises empfohlen werden, die gut geeignet ist, in die theoretische Behandlungsweise eines mechanisch-technischen Erscheinungsgebietes einzuführen.

Mises. 256

ALFRED **LOTZE,** Dr. Studiendirektor in Stuttgart. **Die Grundgleichungen der Mechanik, insbesondere starrer Körper neu entwickelt mit Graßmanns Punktrechnung.** Abhandl. u. Vortr. a. d. Gebiete d. Mathem. Naturw. u. Techn. Heft 7. B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1922. VI + 50 S.

Diese kleine Schrift bildet das 7. Heft der »Abhandlungen und Vorträge aus dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik« und »ist ein Auszug aus einer ausführlicheren noch ungedruckten Einführung in die Mechanik materieller Punktsysteme und starrer Körper mit den Methoden der Graßmannschen Punktrechnung«. (Vorwort). Nach einer kurzen Besprechung der Kinematik des materiellen Punktes werden in drei Kapiteln die Kinematik des starren Körpers, die allgemeine Dynamik materieller Punktsysteme und die Dynamik des starren Körpers nebst den Elementen der Ballschen Schraubentheorie behandelt. Daß der Verfasser sachlich Neues bringt, wird auf diesem Gebiete niemand erwarten. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt in der verwendeten Methode, und diese ist die Ausdehnungslehre Graßmanns, die als bekannt vorausgesetzt wird und deren Vorzüge gegenüber der Koordinatenmethode hervortreten sollen. Daß diese Vorzüge in der Tat bedeutende sind, ist nicht zu leugnen; ob sie aber groß genug sind, um die Erlernung eines neuen und nicht ganz einfachen Kalküls zu rechtfertigen, wird jedenfalls eine strittige Frage bleiben. Wer jedoch mit der Ausdehnungslehre bereits einigermaßen vertraut ist, wird die Arbeit gewiß mit Nutzen lesen.

Gmunden, August 1922.

H. Rothe. 206

JOHANNES **TROPFKE,** Direktor der Kirschner-Oberrealschule in Berlin. **Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter.** Bd. II. Allgemeine Arithmetik. Zweite verbesserte und sehr vermehrte Auflage, Berlin 1921, Vereinig. wiss. Verleger, 222 S. Bd. III. Proportionen, Gleichungen. Zweite verbesserte und sehr vermehrte Auflage, ebenda 1922, 151 S.

Das rühmlichst bekannte Werk hat sich nach den beiden hier vorliegenden Bänden zu schließen, nun zu einem erschöpfenden Handbuch ausgewachsen. Im Gegensatz zu allen anderen Werken über Geschichte der Mathematik macht es nicht bei Beginn des neunzehnten Jahrhunderts Halt, sondern sucht auch die Errungenschaften dieses vielgewichtigen saeculums mit zu verarbeiten. Hier wird nun allerdings mancher mancherlei vermissen. Z. B. hätte wohl die Kritik des Zahlbegriffs, die das neunzehnte Jahrhundert durchzieht, eine mehr als bloß knapp andeutende Behandlung verdient. Auf diesem Gebiet liegt ja gerade ein schönes Beispiel für das Werden mathematischer Begriffsbildung vor. Auch in Richtung der praktischen Mathematik ist nur große Knappheit zu verzeichnen. Die konstruktive Auflösung der Gleichungen dritten Grades mit zwei rechtwinkligen Dreiecken (Rechtwinkelverfahren) und die nomographischen Methoden

wird man vergeblich suchen. Beim Rechtwinkelverfahren ist dies um so merkwürdiger, als dieses bis auf Plato zurückgeht. Gut hätte der Verfasser auch daran getan, Auffassungen, die zum mindesten umstritten sind, als solche zu kennzeichnen. Die Behauptung z. B., daß das Altertum keine Ahnung davon hatte, daß gewisse Aufgaben mit Zirkel und Lineal nicht lösbar seien, vergleiche man etwa z. B. mit der Ansicht Hankels über die gleichen Dinge. Doch es ist leichter, Wünsche zur weiteren Verbesserung su äußern, als dem Verfasser seine im ganzen bewunderungswürdige Arbeitsleistung nachzutun. Man muß dankbar anerkennen, daß wir uns hier vor einem sehr nützlichen und gediegenen Buche finden. Bieberbach. 196

Dr. FRITZ **HEILAND,** Studienrat am Gymnasium in Jena. Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Berlin und Leipzig 1922. Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Sammlung Göschen Bd. 848. 152 S., 26 Fig. im Text.

Hessenbergs vortreffliches Göschenbändchen über ebene und sphärische Trigonometrie hat im vorliegenden Werk eine willkommene Ergänzung gefunden, wenn sich auch in jenem schon einige Beispiele und am Schluß tabellarisch eine Reihe von aufgelösten, ebenen und sphärischen Dreiecken befinden. Der Verfasser hat auf 150 Seiten im Ganzen die stattliche Anzahl von 1362 Aufgaben, wovon rund 1000 auf die ebenen, der Rest auf die sphärischen und einige algebraisch-trigonometrischen Aufgaben entfallen, nebst Angaben sämtlicher Ergebnisse zusammengestellt, eine ansehnliche Leistung, falls er alle, auch die nach seiner Vorwortbemerkung aus Dreieckstafeln mit siebenstelligen Zahlenwerten stammenden, selbst durchgerechnet hat. Die Vorzüge dieser Aufgabensammlung vor ähnlichen, wie sie u. a. in zahllosen Schulbüchern gegeben zu werden pflegen, liegen in eben dieser Beigabe der Ergebnisse, in der sorgfältigen, auf freier Anlehnung an den von Hessenberg in seltener Vollständigkeit entwickelten Formelapparat beruhenden systematischen Anordnung und Gruppierung der Aufgaben und endlich in der Vielseitigkeit der Anwendungsgebiete. Den reinen Uebungsbeispielen folgen geometrische, stereometrische (krystallograpnische), geodätische, astronomische, aber auch den Elementen der physikalischen und technischen Praxis entlehnte Anwendungen. Nicht nur numerische Beispiele, obgleich sie im Vordergrund stehen, sollen durchgerechnet, sondern auch neue Formeln gefunden werden. Dadurch bekommt die ganze Sammlung Farbe und Leben. Der Gang der Lösung ist zwar nur in vereinzelten Fällen beigefügt — bei gegebenem Umfang des Büchleins hätte dies durchweg oder in größerem Maße ja auch nur mit erheblicher Einbuße an der Aufgabenmenge geschehen können —, doch ist am erläuternden Text nirgends und namentlich nicht in den Anwendungen gespart worden, oder wo es sich nicht um bloße Einsetzung von Zahlenwerten in fertige Formeln handelt, sondern erst eine Lösungsmethode überlegt werden muß. So sind z. B. die Grundbegriffe, Grundbeziehungen und Koordinatensysteme der sphärischen Astronomie übersichtlich mit den nötigen Figuren der betreffenden Aufgabengruppen vorangestellt. Bekanntschaft mit dem Gebrauch trigonometrischer Tafeln wird nicht vorausgesetzt, sondern durch Uebungsbeispiele und Aufgaben in der 17 Seiten umfassenden Einleitung vermittelt. Die Genauigkeit der Zahlenwerte entspricht durchweg fünfstelligen Tafeln, auch wenn der Verfasser die auf Minuten abgerundeten Daten des nautischen Jahrbuchs benutzt, wo, wie er selbst betont, vierstellige Tafeln angemessen sind. Den Schulfanatikern der vier- oder gar dreistelligen Tafeln zur Besinnung!

Ich vermisse eins an dem Werk. Es soll ja der liebevollen Pflege des numerischen Rechnens dienen. Da dürfen einige Hinweise auf die für die Sicherung der Ergebnisse notwendigen Rechenkontrollen, etwa nach dem Muster des bekannten Handbuches von Hammer, nicht fehlen. Die Autorität der Angaben des Buches genügt nicht. Denn ich wage an ihrer gänzlichen Fehlerfreiheit zu zweifeln. Wie wärs ferner, wenn der Verfasser, der Näherungsmethoden berücksichtigt, in einer künftigen Auflage auch dem für die Berechnung kleiner oder schmaler Kugeldreiecke grundlegenden Legendreschen Satze einen bescheidenen Platz gönnte? Und schließlich: Einige mißratene Figuren verunzieren das sonst so lobenswerte Buch. Z. B. sind die Fig. 24 und 25 für den unerträglich, der sich eben noch an den so ungemein anschaulich und richtig konstruierten Zeichnungen des Hessenbergschen Bändchens erbaut hat!

Jena. M. Winkelmann. 220

A. **LANDÉ,** Fortschritte der Quantentheorie, Wissenschaftliche Forschungsberichte, Naturwissenschaftliche Reihe, Bd. V. Herausgegeben von R. E. Liesegang. Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1922. 91 S.

Für den ständig wachsenden Kreis derjenigen, die aus Beruf oder Neigung den Fragen modernster exakter Naturwissenschaft Interesse entgegenbringen, wird es immer schwerer, sich die viel verzweigte, in- und ausländischen Zeitschriften und Büchern verstreute Literatur zu verschaffen, sich in ihre Einzelheiten einzuarbeiten und Wesentliches von Unwesentlichem kritisch zu sondern. Die »Wissenschaftlichen Forschungsberichte« haben es sich in ihrer »Naturwissenschaftlichen Reihe« zum Ziel gesetzt, den naturwissenschaftlich Interessierten, insbesondere dem der angewandten Wissenschaft zugekehrten Praktiker die Forschungsergebnisse reiner Wissenschaft in Einzeldarstellungen, in Gestalt handlicher Bändchen, in möglichst geklärter und konziser Form zu übermitteln.

Im vorliegenden Bande, dem fünften der Reihe, behandelt A. Landé die »Fortschritte der Qantentheorie« in den Jahren 1914—1921. Die Darstellung bezweckt, die Arbeiten der

hauptsächlichsten Vorkämpfer der »Theorie der Materie«, Niels Bohr, Born, Debye, Einstein, Ehrenfest, Epstein, Planck, Schwarzschild, Sommerfeld u. v. a., insbesondere die zur Zeit der Abfassung des Buches bloß in den Kopenhagener Akademieberichten erschienenen und nicht leicht lesbaren grundlegenden Arbeiten von Niels Bohr, dem Verständnis derjenigen nahe zu bringen, die über die Kenntnis der Grundzüge analytischer Mechanik und theoretischer Physik verfügen. Jedem Abschnitt des kleinen Büchleins ist ein Verzeichnis derjenigen Literatur angefügt, die der Einführung in Detailfragen des entsprechenden Gebietes dienen soll.

Die ersten sieben Abschnitte enthalten zunächst eine übersichtliche Zusammenstellung der allgemeinen Quantelungsmethoden, den einfachsten Fall ihrer Anwendung, die Berechnung des Serienspektrums des Wasserstoffatoms nach Bohr und Sommerfeld, ferner die ersten Versuche, Systeme mit mehreren Elektronen (Heliumatom, Röntgenspektrum) zu behandeln. In knapper Form wird der Inhalt des Bohrschen »Korrespondenzprinzips« dargelegt, es folgt die Theorie der Bandenspektren (Molekülspektren), wie sie 1920 bekannt war, und der Beeinflussung der Atomspektren durch äußere Felder (Starkeffekt, Zeemanneffekt). Die Quantentheorie fester Körper, die etwa um 1914 zu einem gewissen Abschnitt gekommen war, ist nicht berücksichtigt, wohl aber wird über die Berechnung der chemischen Konstanten der Gase berichtet. Der umfangreiche achte Abschnitt referiert im Speziellen die Hauptergebnisse von Bohrs Arbeiten über die »Quantentheorie der Linienspektren«.

Wenn auch manches der mitgeteilten Ergebnisse bei dem rapiden Fortschritt gerade dieses Forschungsgebietes inzwischen überholt, geklärt oder erweitert worden ist, so ist hier doch geleistet, was auf 90 Seiten zu leisten möglich war. Die kleine Broschüre wird deshalb sicher auch über den Kreis der Leser hinaus, an die sie sich unmittelbar wendet, dem theoretischen Physiker ein willkommenes Kompendium bilden. Eine Neuauflage des Buches soll um die neuesten Errungenschaften der Quantentheorie vermehrt werden, ein weiterer Band der Sammlung: »Experimentelle Grundlagen der Quantentheorie« (von W. Gerlach) die Darstellung ergänzen.

Berlin. G. Laski. 267

W. **NERNST,** Präsident der phys. techn. Reichsanstalt, und A. **SCHOENFLIES,** o. ö. Professor a. d. Universität Frankfurt a. M. Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit 113 im Text befindlichen Figuren. Zehnte vermehrte und verbesserte Auflage. Verlag von R. Oldenbourg, München und Berlin 1923. XII + 502.

Das Erscheinen der 10. Auflage dieses bekannten und verbreiteten Buches, das erst im Jahre 1919 in 9. Auflage erschienen ist, muß als ein Beweis für die allgemeine Wertschätzung, die es bei den Lesern findet, angesehen werden. In der Tat haben es die Verfasser verstanden, ihrem im Jahre 1895 zum ersten Mal gefaßten Plan entsprechend, den richtigen Mittelweg zwischen den Anforderungen mathematischer Strenge und der Auffassungskraft nicht rein mathematisch eingestellter Leser zu finden. Jeder, der ein Gebiet der exakten Naturwissenschaften studieren will, wird in diesem klar und flüssig geschriebenen, auf knappen 500 S. sehr inhaltsreichen Buche alles finden, was zur mathematischen Grundlegung erforderlich ist. Das Buch umfaßt die Elemente der analytischen Geometrie und der Vektorrechnung, die Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung einschließlich der Differentialgleichungen, Auflösung numerischer Gleichungen und zahlreiche Beispiele aus der Mechanik und Thermodynamik. In der jetzt vorliegenden 10. Auflage sind neu hinzugekommen: ein Abschnitt über die Relativitätstheorie, eine sehr schöne Einleitung in die Theorie der Kristallgitter (beides von Schoenfließ) und ein Paragraph über den Nernstschen Wärmesatz (von Nernst).

Das Buch ist auch für Ingenieure und Studierende der Ingenieurwissenschaften geeignet, wenn es auch in erster Linie nicht auf deren Bedürfnisse, sondern auf die der Chemiker und Physiker Bedacht nimmt. Aber unter den für die besonderen Zwecke der Techniker geschriebenen Büchern findet sich keines, das in gleichem Maße mathematisch einwandfrei, gut lesbar und übersichtlich wäre.

Mises. 265

ADOLF **KNESER,** Dr. phil. Dr.-Ing. Prof. an der Universität zu Breslau. Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Vorlesungen. Zweite umgearbeitete Auflage. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges. Braunschweig 1922. VIII + 292.

Die zweite Auflage des im Jahre 1911 zum ersten Male erschienenen Buches zeigt weitgehende Aenderungen, die seine Brauchbarkeit ganz bedeutend vermehrt haben. Während man der ersten Auflage mit Recht vorwerfen mußte, daß der Leser bei dem verwickelten Aufbau des Gedankenganges keine Uebersicht über die Theorie gewinnen könne, hat es der Verf. jetzt verstanden, durch entsprechende Ergänzungen diese Nachteile völlig zu beheben.

Die Integralgleichungen sind ein Hilfsmittel, das die Analysis in den letzten Jahrzehnten zur Behandlung wichtiger Probleme der mathematischen Physik geschaffen hat. In dem Kneserschen Buch wird die Theorie dieses Hilfsmittels in unmittelbarem Anschluß an die physikalischen Probleme entwickelt. Das Buch beginnt mit einem Abschnitt über Wärmeleitung in einem Stab und einem zweiten über die Schwingungen von eindimensionalen Massen-Systemen (Stab oder Seil). An diesen beiden Problemgruppen wird die Be-

deutung und die Anwendbarkeit der Integralgleichungenn erläutert, worauf erst in einem dritten Abschnitt die allgemeine Theorie der hier in Frage kommenden symmetrischen Integralgleichungen folgt. In den weiteren Abschnitten werden dann etwas kürzer und unvollständiger die analogen Probleme im Zwei- und Dreidimensionalen behandelt und die wichtigsten Ausführungen über die Aufgaben der Potentialtheorie angefügt. Den Abschluß bildet, wie auch in der ersten Auflage, eine kurze zusammenfassende Darstellung der Fredholmschen Auflösungsmethode der Integralgleichungen.

Das Buch ist von einem Mathematiker geschrieben mit der Absicht, es dem theoretischen Physiker an die Hand zu geben. Der Physiker, der über gründliche mathematische Vorbildung verfügt und einige Uebung im abstrakten Denken besitzt, wird in dem Buch ohne viel Schwierigkeit einen ihm angemessenen Zugang zu den Integralgleichungen finden. Auf Fragestellungen oder Gedankengänge, die dem Techniker näher lagen, hat der Verf. einzugehen verzichtet.

Mises. 257

AUGUST **ROTTH.** **Wilhelm v. Siemens, ein Lebensbild. Gedenkblätter zum 75 jährigen** Bestehen des Hauses Siemens & Halske. Vereinigung wissenschaftlicher Verleger Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1922. 224 S.

Einen trefflichen Einblick in die Bedeutung und in das Wesen der deutschen industriellen Unternehmungen, wie sie in den letzten Jahrzehnten vor dem Kriege für den Aufschwung des Deutschen Reiches kennzeichnend waren, liefert die Lebensbeschreibung eines der Männer, die an führender Stelle in der Industrie tätig waren. Wilhelm v. Siemens, der zweite Sohn des weltberühmten Werner Siemens, der im Oktober 1919 64 jährig gestorben ist, hat ein Menschenalter hindurch die Leitung der ausgedehnten, von seinem Vater begründeten Werke inne gehabt. Das Buch von Rotth, das anläßlich des 75 jährigen Bestehens des Hauses Siemens & Halske erschienen ist, läßt eine selten ausgeprägte, nach vielen Richtungen hin bedeutsame Persönlichkeit erkennen. Tatkraft, unermüdlicher Fleiß, gründliche Bildung verband sich hier mit einem reinen, auf das Wohl der Allgemeinheit gerichteten Wollen. — War Wilhelm v. Siemens auch durchaus nicht das, was wir einen Wissenschaftler oder gar einen Gelehrten nennen, so zeigten sich doch in ihm vielfach Züge, die auch dieser Seite menschlichen Wesens und menschlicher Betätigung entsprachen. So hatte er, wie sein Biograph mitteilt, Zeit seines Lebens das lebhafte Bedürfnis, alles, was er erfuhr und erfaßte, in schriftlicher, möglichst geklärter Form für sich selbst niederzulegen. Nach seinem Tode fand man u. a. vier umfangreiche Quartbände vor, in denen er ohne jede Absicht einer Veröffentlichung, eine Geschichte des Weltkrieges, wie er sich ihm unmittelbar darbot, verfaßt hatte. Unter allen Ehrungen, die Wilhelm v. Siemens in reichem Maße zuteil geworden sind, hat er die Promotion zum Ehrendoktor durch die Philosophische Fakultät der Berliner Universität besonders hoch eingeschätzt. — Das Buch läßt in dem Leser den Wunsch erstehen, es möchten bald die Zeiten wiederkehren, in denen solche Männer, wie Wilhelm v. Siemens einer war, dem deutschen Volke wieder geschenkt würden und vor allem auch Raum und Möglichkeit zur Entfaltung ihrer Wirksamkeit gewännen.

Mises. 233

NACHRICHTEN

Prof. Dr.-Ing. Gümbel †. Ludwig Gümbel, der seit 1910 den ordentlichen Lehrstuhl für Schiffbautechnik an der Hochschule in Charlottenburg inne hatte, ist vor kurzem gestorben. Er war am 12. März 1874 in St. Julian im Rheinland geboren. Durch eine Reihe von wertvollen Arbeiten auf verschiedenen Gebieten der technischen Mechanik hat sich Gümbel in weiten Kreisen bekannt gemacht. Genannt seien insbesondere seine eingehenden Untersuchungen über den Schiffswiderstand, seine erfolgreichen Forschungen über Lagerreibung, Festigkeitsberechnungen von U-Bootkörpern, verschiedene Aufsätze über zeichnerische Integrationsverfahren usf. Die Arbeiten sind in den Jahrbüchern der Schiffbautechnischen Gesellschaft, in der Zeitschrift »Schiffbau«, in der Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, in den Forschungsheften und anderwärts erschienen. Gümbel gehörte zu den Ingenieuren, die die Bedeutung wissenschaftlicher Forschung für den Fortschritt der Technik nicht verkennen, und hat sich mit Erfolg darum bemüht, den Problemen, die ihm begegneten, mit wissenschaftlichen Hilfsmitteln beizukommen. Im Jahre 1919 begründete er innerhalb des Berliner Bezirksvereins deutscher Ingenieure den Ausschuß für technische Mechanik, dessen erster Vorsitzender er war und in dem die theoretischen Ingenieurwissenschaften eine dauernde Pflegestätte gefunden haben.

Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereins deutscher Ingenieure. Am 12. Februar spricht Dr. W. Hort über Selbsterregung mechanischer Schwingungen, am 5. März Prof. Reißner über eine Bedingung für den stoßfreien Gang von Getrieben, am 23. April Hr. Direktor Schieferstein über Nutzbarmachen mechanischer Schwingungen in Maschinen-Apparatebau.

Ein neues Einschienenbahn-System. Im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure hielt Hr. P. Schilowsky aus Petersburg am 16. Oktober unter dem Vorsitz von Hrn. Professor Reißner, einen mit großem Interesse aufgenommenen Vortrag über die Forschungen, die er seit einer Reihe von Jahren in Petersburg über den Kreisel und seine praktische Verwendung, z. B. im Bahnbetrieb, angestellt hat. Der Vortragende fesselte die Zuhörer besonders dadurch, daß er mehrere außerordentlich belehrende Experimente mit Kreiseln vorführte. Dem Vortrage wohnten auch Vertreter des Reichsverkehrsministeriums und der Großindustrie bei.

Hr. Schilowsky hat bereits im Jahre 1914 ein zweirädriges Automobil, das mit einem Gyroskop ausgerüstet war, in London in Verkehr gebracht; der Krieg zwang ihn dann, seine Forschungen in Petersburg weiter zu betreiben, und hier wurde er durch eine Reihe namhafter russischer Gelehrter und Ingenieure in weitestem Maße unterstützt. In erster Linie hat man die Verwendung des Kreisels für Einschienenbahnen ins Auge gefaßt, und die vorgeführten Experimente brachten den Beweis, daß man die Aufgabe tatsächlich bis ins kleinste gelöst hat.

Hr. Oberingenieur Schröder von der Firma Thyssen & Co. A.G. teilte den Zuhörern mit, daß die hier inbetracht kommende Wirkungsweise des Kreisels trotz der schwer zu behandelnden Materie mathematisch völlig geklärt sei. Hierüber sei eine größere wissenschaftliche Abhandlung in russischer Sprache abgefaßt worden, deren Uebersetzung und Bekanntgabe in deutscher Sprache in Aussicht gestellt wurde.

Hr. Ingenieur Kendler, einer der Mitarbeiter des Hrn. Schilowsky, gab zum Schluß noch einige Konstruktionsdaten über die Einschienenbahn unter Bezugnahme auf die im Saale ausgehängten Zeichnungen von Oberbauteilen und Wagen bekannt. Aus den mitgeteilten Daten ging hervor, daß man tatsächlich dem Einschienenbahnsystem aus wirtschaftlichen Gründen das größte Interesse entgegenzubringen gezwungen ist, zumal die Bedenken bezüglich der Sicherheit ganz fallen gelassen werden dürfen.

Die Verhältnisse in Rußland gestatten es leider nicht, dort eine Versuchsbahn zu errichten; obwohl man eine kurze Strecke mit dem »Einschienen-Oberbau« versehen hat, fehlt es doch an Unternehmerfirmen, die die Herstellung eines Versuchswagens in die Hände nehmen. Vielleicht gelingt es Hrn. Schilowsky, hier in Deutschland die erforderliche Unterstützung zu finden. Die Gewinnung der Naturschätze im Osten Rußlands würde durch die Anlage von Einschienenbahnen in greifbare Nähe gerückt werden. Aber auch für den deutschen Schnellbahn- und Vorortverkehr dürfte das Einschienenbahnsystem von großer Bedeutung sein.

A. W. G. Schröder.

Technisch-Wissenschaftliches Vortragswesen Berlin. Um dem in der Industrie schwer empfundenen Mangel an Werkstattleuten und Konstrukteuren, welche genügende Erfahrung auf dem Gebiete der Materialprüfung und der Metallkunde besitzen, abzuhelfen, beabsichtigt, die »Deutsche Gesellschaft für Metallkunde« und der »Deutsche Verband für die Materialprüfungen der Technik« eine Reihe von Vortragskursen im Rahmen des TWV-Berlin zu veranstalten. Die erste Vortragsreihe »Werkstoff und Konstrukteur« umfaßt folgendes Programm:

Regierungs- und Baurat Füchsel (Eisenbahnzentralamt): Fehler bei der Konstruktion und Bearbeitung der Werkstoffe, Beispiele aus der Praxis. — Prof. Dr. Berndt (Ludw. Loewe & Co., A.-G.): Zerreißversuche, Warmzerreißversuche. — Prof. Dr. Berndt: Kerbwirkung, Dauerbeanspruchung, Härteprüfung. — Ober-Ing. Wunder (AEG-Berlin): Kristallaufbau der Metalle und Legierungen, Sichtbarmachung, Aetzung, Makroskopie, Mikroskopie. — Ober-Ing. Wunder: Kristallgefüge, Veränderung, Rückbildung. — Prof. Dr. Guertler (Technische Hochschule Berlin): Zustandsdiagramm der Nichteisenmetalle. — Prof. Dr. Hanemann (Technische Hochschule Berlin): Härtung und Körnung von Eisen und Stahl. — Prof. Dr. Riebensahm (Technische Hochschule Berlin): Zusammenfassung, Rückblick.

Die Vorträge finden im Vortragssaal des Metallhüttenmännischen Instituts, Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg, Eingang Hardenbergstraße 35, Donnerstags 6 Uhr statt, beginnend am 25. Januar 1923. Der einzelne Vortragsabend besteht aus dem etwa $1^1/_2$-stündigen Vortrag, verbunden mit Experimenten und anschließender Aussprache. Ausweiskarten sind gegen Einsendung der Teilnehmergebühr von M 1000.— durch die Geschäftsstelle des Technisch-Wissenschaftlichen Vortragswesens — Berlin NW 7, Sommerstraße 4a (Postscheckkonto Berlin Nr. 75627) — zu beziehen.

Ferner findet eine Vortragsreihe über Wechselstromaufgaben in vektoranalytischer Behandlung von Hrn. Fr. Natalis an 4 Abenden in der Technischen Hochschule Charlottenburg, Hörsaal 141 statt, beginnend am Dienstag, den 6. März. Karten usf. wie oben.

Amerikanische Mathematiker-Vereinigung. Im Dezember 1922 hat die 7. Jahresversammlung stattgefunden, deren Programm in bemerkenswerter Weise das Zusammenarbeiten der Praktiker und der Mathematiker in Amerika zeigt. Ein besonderer Sitzungstag war der mathematischen Statistik gewidmet und hierzu heißt es auf der Einladung: »Diese Sitzung ist einem »Symposium der Mathematischen Statistik« gewidmet zum Zwecke, die ohnehin bestehende entente cordiale zwischen Mathematikern und praktischen Statistikern zu vertiefen. Es ist zu hoffen, daß dieses Symposium wirkliche Dienste leisten wird nicht nur denen, die Statistik lehren, sondern auch denen, die an der Anwendung

der Mathematik auf statistische Probleme interessiert sind. Reichliche Zeit zur Aussprache soll gewährt werden und ein allgemeiner Gedankenaustausch ist erwünscht.«

Folgende Vortragsthemen waren für die Sitzung in Aussicht genommen: 1. H. L. Rietz, The Subject Matter of a Course in Mathematical Statistics. 2. W. M. Persons, Time Series of Economic Statistics, Their Fluctuation and Correlation. 3. A. Fisher, Some Fundamental Concepts of the Calculus of Mass Variation and their Relations to Practical Problems. 260

Neue Bezeichnungen und Maßeinheiten in der Mechanik. Der Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen legt folgende neue Festsetzungen bezw. Entwürfe vor:

Satz IX. Masse und Gewicht.

1. Die Masse eines Körpers ist das Maß seiner Trägheit, das ist seines Widerstandes gegen Beschleunigung. Die Masse ist gleich dem Quotienten der auf den Körper wirkenden Kraft durch die von ihm erzeugte Beschleunigung, also z. B. gleich dem Gewicht des Körpers geteilt durch die Fallbeschleunigung an dem Ort.
2. Die Schwerkraft eines Körpers an einem Ort ist die an diesem Ort auf ihn ausgeübte gesamte Massenanziehungskraft. Sie ist gleich dem Produkt der Masse des Körpers und der Schwerebeschleunigung an dem Ort.
3. Das Gewicht eines Körpers an einem Ort der Erde ist die an diesem Ort auf den ruhenden Körper im luftleeren Raum wirkende Mittelkraft aus der Schwerkraft und der gesamten durch die Drehung und Wanderung der Erde bedingten Scheinkraft. Das Gewicht ist gleich dem Produkt aus der Masse des Körpers und der Fallbeschleunigung an dem Ort und ändert sich somit im gleichen Verhältnis wie die Fallbeschleunigung.
4. Die Last eines Körpers ist die Kraft, die der ruhende Körper im lufterfüllten Raum auf die Wage ausübt. Die Last ist gleich dem Gewicht vermindert um den Betrag des Luftauftriebs.
5. Das Sichtgewicht eines Körpers ist das auf einer Wage im lufterfüllten Raum unmittelbar abgesehene Gewicht. Die Abweichung des Sichtgewichts von dem Gewicht des Körpers beruht auf dem Unterschiede des Auftriebs des Körpers und der Gewichtstücke. Das Sichtgewicht ist mit der Dichte der Luft veränderlich.
6. Die Schwerebeschleunigung ist die einem Körper durch seine Schwerkraft erteilte Beschleunigung. Sie ändert sich daher mit dem Ort und mit der Zeit im gleichen Verhältnis wie die Schwerkraft.
7. Die Fallbeschleunigung ist die einem Körper durch sein Gewicht — also durch das Zusammenwirken von Schwerkraft und gesamter Scheinkraft — im luftleeren Raum erteilte Beschleunigung. Die Fallbeschleunigung ist gleich der geometrischen Summe aus der Schwerebeschleunigung und der Scheinkraftbeschleunigung und ändert sich mit dem Ort und mit der Zeit im gleichen Verhältnis wie das Gewicht des Körpers.
8. Als Normalwert der Fallbeschleunigung gilt $g = 980{,}665 \text{ cm/s}^2 = 9{,}80665 \text{ m/s}^2$. Häufig genügt es, für g die abgerundeten Werte 9,81 oder 9,8 oder 10 m/s² je nach der verlangten Genauigkeit zu setzen.

Aus den Erläuterungen von M. Weber, Fr. Auerbach und W. Jaeger sei hervorgehoben:

Die Wagekräfte, die Gewichte, die Schwerkräfte und die Massen zweier Körper können mittels einer **Wägung** verglichen werden. Die Wage in der Form eines doppelarmigen Hebels vergleicht nicht unmittelbar die beiden Massen rechts und links, sondern zunächst auf Grund des Hebelsatzes die beiderseitigen Kraftmomente, und bei Kenntnis der Hebelarme auch die Wagekräfte rechts und links, welche kurz als Lasten bezeichnet werden. Diese Lasten sind Mittelkräfte, je zusammengesetzt aus der Schwerkraft, aus der durch die Drehung und Wanderung der Erde bedingten Scheinkraft und dem Auftrieb. Wird das Ergebnis einer Wägung durch den unmittelbar abgelesenen Nennwert der Gewichtstücke, also ohne Berücksichtigung der Auftriebe, ausgedrückt, so erhält man das Sichtgewicht des Körpers. Erst nach Berücksichtigung der im allgemeinen verschiedenen Auftriebskräfte rechts und links, also nach Zurückführung der Wägung auf den luftleeren Raum, sowie nach Berichtigung etwaiger Fehler der Wage und der Gewichtsstücke ergaben sich die beiderseitigen Gewichte, die somit trotz Gleichgewicht des Wagebalkens verschieden groß ausfallen. Nun erst können unter der besonderen Voraussetzung, daß die Fallbeschleunigungen g rechts und links gleich groß sind, auch die beiden Massen verglichen werden, andernfalls ist bei Verschiedenheit von g, wie dies bei einzelnen wissenschaftlichen Versuchen künstlich herbeigeführt wird, noch eine besondere Umrechnung erforderlich. Sollten auch die der reinen Massenanziehung entsprechenden Schwerkräfte der beiden Körper ermittelt werden, so ist auf beiden Seiten je die Mittelkraft aus dem Gewicht und dem Entgegengesetzten der Scheinkraft zu bilden. Da letztere dem Gewicht gegenüber stets sehr klein ist, tritt in praktischen Rechnungen der Unterschied zwischen Gewicht und Schwerkraft nicht zutage.

Die Begriffserklärungen in der neuen Fassung entspringen nicht dem Bestreben, theoretische Verfeinerungen herauszuarbeiten, sondern der Notwendigkeit, den Bedürfnissen der Praxis und der Wissenschaft gerecht zu werden und eine den tatsächlichen Verhältnissen entsprechende einheitliche und natürliche Grundlage für das physikalische und technische Maßsystem zu schaffen. — Das Gewicht

eines Körpers wird am sorgfältigsten durch eine Wägung, d. h. durch Messung mittels der Hebelwage — am besten einer gleicharmigen — bestimmt. Daher sind bei Festlegung des Begriffs Gewicht die bei der Wägung tatsächlich bestehenden Verhältnisse zu Grunde zu legen. Wird die Wägung, wie es wiederholt geschehen ist, unmittelbar im luftleeren Raum vorgenommen, so scheiden die beiderseitigen Auftriebskräfte der Luft aus, und es wirken auf jeden der beiden Vergleichskörper, den zu wägenden Körper und die Gewichtstücke, nur zwei, im Sinne der klassischen Mechanik *Newtons* aber grundverschiedene Ursachen:

1. die aus der Massenanziehung entspringende Schwerkraft und
2. die durch die Bewegung der Erde bedingte Scheinkraft.

Die Mittelkraft dieser beiden ist das meßbare Gewicht.

Die *Schwerkraft* des Körpers ist die bei der Wägung an ihm auftretende gesamte Massenanziehungskraft; sie rührt nicht nur von der Erde her, sondern auch von der Sonne, dem Monde und den anderen Himmelskörpern. Die Anziehung der Erde überragt bei weitem die von den andern Massen ausgehende; doch sind die von Sonne und Mond hervorgerufenen Schwerewirkungen schon seit längerer Zeit in den Bereich der Messungen gerückt und im übrigen auch der unmittelbaren Anschauung, z. B. bei den Erscheinungen der Ebbe und Flut, zugänglich. Die Schwerkraft ändert sich mit dem Ort und mit der Zeit der Beobachtung. Für die meisten Fälle der Praxis genügt ein fester abgerundeter Wert.

Die *Scheinkraft* wird nach den Gesetzen der relativen Ruhe und Bewegung eines Körpers bezüglich der gegen den Fixsternhimmel beschleunigt bewegten Erde bestimmt. Die oben gegebene Erklärung des Begriffs Gewicht setzt einen auf der Erde *ruhenden* Körper voraus. Für diesen Fall relativer Ruhe ist die sogenannte »*erste Scheinkraft*« nach Größe und Richtung durch das Produkt aus der Masse des Körpers und dem Entgegengesetzten der Beschleunigung des Erdortes gegeben, wobei sich diese geometrisch aus den beiden Beschleunigungen zusammensetzt, welche der Drehung der Erde um ihre Achse und ihrer beschleunigten Bewegung relativ zum Fixsternhimmel entspringen. Die aus der Erddrehung sich ergebende Beschleunigung überwiegt bei weitem, und so genügt es in einfachen Fällen, die ihr entsprechende Scheinkraft, d. i. die Fliehkraft, allein in Rechnung zu stellen. Handelt es sich um einen auf der Erde *bewegten* Körper, so ist zu der ersten noch die »*zweite Scheinkraft oder Corioliskraft*« nach den Lehren der relativen Bewegung hinzuzufügen.

Alle diese an einem Körper angreifenden Massenanziehungs- und Scheinkräfte ergeben in ihrer Gesamtheit das Gewicht des Körpers, welches wie jene beiden Kräfte mit dem Ort und mit der Zeit veränderlich ist.

Die Verfeinerung der Messungen gestattet die Gewichtswirkungen eines Körpers mit großer Genauigkeit zu bestimmen. Aber nicht nur die eben erörterten Kräfte und ihre Veränderungen sind der Messung zugänglich, sondern durch den Versuch ist auch festgestellt worden — was theoretisch längst bekannt war —, daß sich das Gewicht eines Körpers an einem Ort der Erde nicht, wie oben vorausgesetzt ist, durch eine Mittelkraft darstellen läßt, sondern durch zwei Vektoren, eine Kraft und gleichzeitig ein Kräftepaar, welche beide mit der Zeit veränderlich sind. In den meisten Fällen der Anwendung ist allerdings das Gewicht auch weiterhin durch eine einfache Mittelkraft darzustellen, dort aber, wo die zwei Vektoren des Gewichts selbst Gegenstand der Untersuchung sind, ist natürlich eine Verfeinerung des oben gegebenen Begriffs Gewicht in dem eben besprochenen Sinne nicht zu umgehen.

Entwurf XXVI. Dichte und Wichte.

1. *Dichte* (spezifische Masse) ist der Quotient der Masse eines Körpers durch sein Volumen.
2. *Wichte* (spezifisches Gewicht) ist der Quotient des Gewichtes eines Körpers durch sein Volumen.
3. *Dichtezahl oder Wichtezahl* (Dichteverhältnis oder Wichteverhältnis) ist das Verhältnis der Dichte oder der Wichte eines Körpers zu der Dichte oder der Wichte eines Vergleichskörpers. Wenn keine besonderen Gründe dagegen sprechen, ist als Vergleichskörper Wasser von 4° C bei einem Außendruck von 76 cm Quecksilbersäule zu wählen.
4. *Massenräumigkeit* (spezifisches Massenvolumen) ist der Quotient des Volumens eines Körpers durch seine Masse, also der Kehrwert der Dichte.
5. *Gewichtsräumigkeit* (spezifisches Gewichtsvolumen) ist der Quotient des Volumens eines Körpers durch sein Gewicht, also der Kehrwert der Wichte.

Bei unhomogenen Körpern ist anzugeben, ob sich die Werte auf den Stoff ohne Poren, oder auf den Körper mit Poren oder auf Schüttgut usw. beziehen. Ferner sind, wenn es die Genauigkeit erfordert, Temperatur und Druck anzugeben, bei denen die Messung stattgefunden hat.

Zur Begründung und Erläuterung führen *M. Weber* und *Fr. Auerbach* u. a. aus:

Ideal wäre es, wenn für jeden der fünf in Rede stehenden Begriffe ein einziges kurzes deutsches Wort angegeben werden könnte, dessen gebräuchlicher Sinn sich mit dem betreffenden Begriff gut deckt. Zulässig erscheinen noch zwei Worte, wie spezifische Masse, spezifisches Gewicht usw. Dagegen sind bei den in den eingegangenen Aeußerungen neu genannten Bezeichnungen alle Vorschläge

auszuschließen, welche die kurze Begriffsbezeichnung von vornherein durch eine Begriffserklärung, wenn auch nur in drei Worten ersetzen wollen, wie z. B. Masse der Raumeinheit oder Gewicht der Raumeinheit. Diese Erklärungen sind überdies geeignet, über die Dimensionen der Größen irre zu führen.

Zusammengesetzte Namen, wie Raummasse und Raumgewicht sowie Masseraum und Gewichtsraum, sind mit Absicht in den Entwurf nicht aufgenommen worden, weil sie Anlaß zu Verwechslungen geben, da die Zusammensetzung mit Ausnahme von Gewichtsraum nicht den Genitiv des ersten Wortes erkennen läßt. Deutlichere Bildungen, wie Raumeinheitsmasse usw. sind ihrer Länge wegen zu verwerfen.

Entwurf XXVII.
Einheiten für mechanische Größen.

Physikalisches Maßsystem	Technisches Maßsystem
Dritte Grundheit ist das Gramm (1 g) als Einheit der Masse. Das Gramm ist der 1000ste Teil des Kilogramms, der Masse des internationalen Kilogrammprototyps.	**Dritte Grundheit ist das Kil (1 Kil) als Einheit der Kraft. Das Kil ist das Gewicht des internationalen Kilogrammprototyps, des Kilogramms, an einem Ort, an dem die Fallbeschleunigung den Normalwert 9,80665 m/s² hat.**
a) Masse.	**a) Kraft.**
Das Gramm — g, kg, dg, cg, mg.	Das Kil — Kil, m Kil, μ Kil.
Die Tonne — 1 t = 1000 kg; 1 dt = 100 kg.	Das Ton — 1 Ton = 1000 Kil, 1 d Ton = 100 Kil.
b) Kraft.	**b) Masse.**
Das Dyn — 1 dyn = 1 gcm/s².	Das Newton — 1 New = 1 Kil s²/m.
Der Stein — 1 sn = 10^8 dyn.	

$$1\ \text{kg} = \frac{1}{9{,}80665}\ \text{New};$$

$$1\ \text{New} = 9{,}80665\ \text{kg} = 9806{,}65\ \text{g}.$$

$$1\ \text{dyn} = \frac{1}{980665}\ \text{Kil} \approx 1{,}02 \cdot 10^{-6}\ \text{Kil} \approx 1{,}02\ \mu\ \text{Kil}.$$

$$1\ \text{Kil} = 980665\ \text{dyn} \approx \frac{1}{102}\ \text{sn}.$$

c) Arbeit und Energie.

Das Erg. — 1 erg = 1 dyn . cm = 1 gcm²/s².	Das Mayer — 1 May = 1 Kil . m.
Das Joule — 1 J = 10^7 erg.	Die Pferdestärkestunde — 1 PSh = 270 000 May.
Die Wattsekunde — 1 Ws = 1 J.	
Das Helmholtz — 1 Helm = 1 sn . m = 1 kJ = 1 kWs = 10^{10} erg.	
Die Kilowattstunde — 1 kWh = 3600 sn.m = 3600 Helm.	

Physikalisches Maßsystem	Technisches Maßsystem

$$1\ \text{Helm} = \frac{10^3}{9{,}80665}\ \text{May} \approx 102\ \text{May};$$

$1\ \text{J} \approx 0{,}102\ \text{May};\ 1\ \text{kWh} = 367200\ \text{May}.\ 1\ \text{May} = 98\,066\,500\ \text{erg} = 9{,}80665\ \text{J} = 2{,}724 \cdot 10^{-6}\ \text{kWh}$
$\approx \frac{1}{102}\ \text{kJ} \approx \frac{1}{102}\ \text{kWs} \approx \frac{1}{102}\ \text{sn . m} \approx \frac{1}{102}\ \text{Helm}.$

d) Drehmoment.

Das Lionard — 1 L = 1 dyn . cm = 1 gcm²/s².	Das Archimed — 1 Arch = 1 Kil . m; 1 c Arch = 1 Kil . cm.

$$1\ \text{L} = \frac{1}{98\,066\,500}\ \text{Arch} \approx 1{,}02 \cdot 10^{-8}\ \text{Arch}.$$

$$1\ \text{Arch} = 98\,066\,500\ \text{L}.$$

e) Leistung.

Das Watt — 1 W = 1 J/s = 10^7 erg/s = 10^7 gcm²/s³.	Das Prony — 1 Pron = 1 Kil m/s = 1 May/s.
Das Kilowatt — 1 kW = 1 kJ/s = 1/sn . m/s = 1 Helm/s.	Die Pferdestärke — 1 PS = 75 Kil m/s = 75 Pron.

$$1\ \text{W} = \frac{1}{9{,}80665}\ \text{Pron} \approx 0{,}102\ \text{Pron}.$$

$$1\ \text{kW} = \frac{1000}{9{,}80665}\ \text{Pron} \approx 102\ \text{Pron} \approx 1{,}36\ \text{PS}.$$

$$1\ \text{PS} \approx 0{,}735\ \text{kW} \approx 0{,}735\ \text{sn . m/s} \approx 0{,}735\ \text{Helm/s}.$$

f) Spannung.

Das Bar ist gleich dem Druck oder Zug von 1 dyn auf 1 cm² — 1 bar = 1 dyn/cm².	Das Atmo, die technische Atmosphäre (1 at) ist gleich dem Druck oder Zug von 1 Kil auf 1 cm².
Das Pez — 1 Pez = 10 000 bar = 10^4 dyn/cm² = 1 sn/m²	1 at = 1 Kil/cm² = 10^{-4} Kil/m².
Die physikalische Atmosphäre (1 Atm) ist gleich dem Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0° und normaler Fallbeschleunigung (980 665 cm/s²) — 1 Atm = 1013 253 bar.	
Das Toricelli (1 tor) ist gleich dem Druck einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe bei 0° und normaler Fallbeschleunigung — 1 tor = $\frac{1}{760}$ Atm.	

$$1\ \text{pez} = \frac{1}{98{,}0665}\ \text{Kil/cm}^2 = \frac{1}{98{,}0665}\ \text{at}$$

$$\approx 0{,}0102\ \text{at} \approx 0{,}0102\ \text{Kil/cm}^2 \approx 102\ \text{Kil/m}^2.$$

$$1\ \text{Atm} = \frac{1013253}{980665}\ \text{at} = 1{,}0333\ \text{at}.$$

$$1\ \text{at} = 1\ \text{Kil/cm}^2 = 0{,}9678\ \text{Atm}$$

$$= 98{,}0665\ \text{pez} = 980665\ \text{bar}.$$

In der Begründung und Erläuterung von K. Strecker und M. Weber heißt es u. a.:

Die Physiker berufen sich darauf, daß das Kilogramm international als Einheit der Masse allgemein angenommen ist, und daher in der deutschen Maß- und Gewichtsordnung vom 30. Mai 1908, Reichs-Gesetzblatt S. 349, mit den Worten »Das Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps« ausdrücklich als eine Masse gekennzeichnet wird. Schon aus diesen beiden Gründen wäre es aussichtslos, die Physiker zum Aufgeben ihres Standpunktes veranlassen zu wollen. Der Name Kilogramm ist daher eindeutig für die Masseneinheit im physikalischen Maßsystem angenommen worden.

Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, im technischen Maßsystem für die Krafteinheit eine andere Bezeichnung zu wählen. Nach langen Beratungen wurde zuerst vorgeschlagen, der technischen Krafteinheit den Namen »das Kilo« mit dem Einheitszeichen K zu geben, da sowieso in Deutschland und den romanischen Ländern auf dem Markt und im Haushalt viel häufiger in Kilo als in Kilogramm gerechnet wird. Dem Einwand, daß Kilo die Zahl Tausend bedeute und daher nicht als Name für ein Maß benutzt werden dürfe, ist entgegenzuhalten, daß das Kilo in der Türkei ein altes, vielgebrauchtes, seit 1874 aber aus dem Handel entferntes Getreidemaß ist. — Der Wahl von Kilo als Name für die technische Krafteinheit trat aber ein unüberwindliches Hindernis in der Arbeitseinheit, dem bisherigen Kilogrammeter, entgegen, welches jetzt Kilometer oder Meterkilo hätte heißen müssen, zwei Wortzusammensetzungen, die beide zurückzuweisen sind, die erste wegen der Verwechselung mit dem gleichnamigen Längenmaß, die zweite, weil ihre Einheitsbezeichnung mK gleich der von Millikilo d. i. ein 1000 stel Kilo ist.

Dennoch waren die Ueberlegungen, die auf den Namen Kilo für die technische Krafteinheit geführt hatten, nicht umsonst gewesen. Es wurde im Anschluß hieran vorgeschlagen, an Stelle von Kilo den kürzeren Einheitsnamen Kil — mit Aussprache eines gedehnten i — zu setzen und in der Einheitsbezeichnung ebenfalls Kil — ungekürzt und mit großen Anfangsbuchstaben — zu schreiben. Die Einheit der Arbeit heißt jetzt das Kilmeter, (Kil. m) welches keinen Anlaß zu Verwechslungen bietet.

Bei dieser grundsätzlichen Einigung über die Einheitsnamen der Masse und der Kraft in beiden Systemen bleibt natürlich das Gramm als der 1000 ste Teil des Kilogramms dem physikalischen Maßsystem erhalten und hat im technischen keinen Platz mehr. An die Stelle des bisherigen Kraft-Gramms tritt folgerichtig nach den allgemeinen Grundsätzen das Millikil (m Kil). Der 1 000 000 ste Teil eines Kil ist das μ Kil (gesprochen Mikrokil). — Für die bisherige Krafttonne wird zum Unterschied von der verbleibenden Massentonne mit dem Einheitszeichen t das Ton eingeführt, welches ungekürzt zugleich auch Einheitsbezeichnung ist. Das Ton ist ein in der Schiffsvermessung gängiger Name, wird aber besonders in England und Amerika für eine ganze Reihe verschieden großer Gewichte benutzt.

Zu den im neuen Entwurf vorgeschlagenen Einheitsnamen für die mechanischen Größen ist noch folgendes zu bemerken:

Masse. Die physikalische Einheit ist das Gramm (1 g), die dritte Grundeinheit des physikalischen Maßsystems.

Die technische Einheit ist das Newton (1 New), eine abgeleitete Einheit, nämlich die Masse eines Körpers, dem die technische Krafteinheit, das Kil, die Beschleunigung 1 m/s² erteilt. Das Newton ist eine Masse von 9,80665, also fast 10 Kilogramm. Die Einheitsbezeichnung New wird im Deutschen Nef gesprochen.

Kraft. Die physikalische Einheit ist das Dyn (1 dyn), eine abgeleitete Einheit, nämlich die Kraft, welche der physikalischen Masseneinheit, dem Gramm, die Beschleunigung 1 cm/s² erteilt, oder das Gewicht von $\frac{1}{980,665}$ Gramm an einem Orte, an dem die Fallbeschleunigung den Normalwert 980,665 cm/s² hat. Neben dem Dyn wird die 10^8 mal so große praktische Einheit, der Stein (1 sn), verwendet.

Die technische Einheit ist das Kil (1 Kil), die dritte Grundeinheit des technischen Maßsystems, neben welchem das Ton (1 Ton) als praktische Einheit benutzt werden kann. Das Kil ist eine Kraft von 980 665 dyn.

Arbeit und Energie. Die physikalische Einheit ist das Erg (1 erg = 1 dyn. cm), neben welche folgende praktische Einheiten treten: das Joule (1 J) gleich der Wattsekunde (1 Ws), ferner im Meter-Tonne-Sekunde-System das Helmholtz (1 Helm) gleich einer Kilowattsekunde (1 kWs) gleich einem Steinmeter (1 sn. m) und die Kilowattstunde (3600 Helm).

Die technische Einheit ist das Mayer (1 May) gleich dem Kilmeter (1 Kil. m), neben welcher als praktische Einheit die Pferdestärkestunde (1 PSh) benutzt werden kann.

Drehmoment. Die physikalische Einheit ist das Lionard (1 L = 1 dyn. cm).

Die technische Einheit ist das Archimed (1 Arch = 1 Kil. m).

Leistung. Die physikalische Einheit ist das Watt (1 W = 10^7 erg/s), neben welche als praktische Einheit das Kilowatt (1 kW = 1 sn. m/s = 1 Helm/s) tritt.

Die technische Einheit ist das Prony (1 Pron = 1 Kil. m/s = 1 May/s), neben welcher als praktische Einheit die Pferdestärke (1 PS = 75 Pron) benutzt wird.

Spannung (Druck oder Zug). Die physikalische Einheit ist das Bar (1 bar = 1 dyn/cm²), neben welche folgende praktische Einheiten treten: Das Pez (1 pez = 10 000 bar = 1 sn/m²), die physikalische Atmosphäre (1 Atm) und das Tor (1 Tor = $\frac{1}{760}$ Atm).

Die technische Einheit ist das Atmo, d. i. die technische Atmosphäre (1 at = 1 Kil/cm² = 10^{-4} Kil/m²).

Für die neu vorgeschlagenen Einheitsnamen waren folgende Ueberlegungen maßgebend:

Isaac Newton, der Schöpfer der klassischen Mechanik, hat den Begriff der Masse eingeführt.

Robert Mayer hat als erster die Aequivalenz von Wärme und Arbeit erkannt.

James Prescott Joule hat das mechanische Wärmeäquivalent durch sorgfältige Messungen bestimmt.

Hermann Helmholtz hat die umfassende Bedeutung des Prinzips von der Erhaltung der Energie erkannt.

Archimedes hat einen Beweis für den Satz von der Gleichheit der Drehmomente am ungleicharmigen, lotrecht belasteten Hebel gegeben.

Lionardo da Vinci hat den Satz von der Gleichheit der Drehmomente auf schief am Hebel wirkende Kräfte erweitert.

Prony hat als erster die Leistung der Maschinen mittels des Bremszauns bestimmt.

Toricelli entdeckte den Luftdruck und hat als erster den Druck der Atmosphäre durch eine Quecksilbersäule gemessen.

Der Stein. Diese Einheit wird im neuen französischen Gesetz über die Maßeinheiten »stène« (vom griechischen sthenos, Kraft) genannt. Es schien zweckmäßig, diesen Namen einzudeutschen; es wird vorgeschlagen, dafür das gleichklingende Wort »Stein« zu wählen, das auch einen vorstellbaren Zusammenhang mit dem Kraftbegriff hat.

Das Bar ist vom griechischen barys, schwer, abgeleitet; vergl. Barometer.

Das Pez. Diese Einheit wird im neuen pièze genannt und ist von dem griechischen piezein, drücken, abgeleitet. Das im Deutschen schlecht zu sprechende Wort ist in Pez umgewandelt worden. 270

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Einheitliche Bezeichnungen in der Vektorenrechnung.[1]) Neben den bisher in dieser Zeitschrift abgedruckten dankenswerten Aeußerungen zu dieser Frage[1]) seien noch die folgenden Bemerkungen erlaubt.

1. (Zu 1). Deutsche Buchstaben zur Bezeichnung der Vektoren sind zuerst von Maxwell benutzt worden. In der deutschen physikalischen Literatur waren Vektorsymbole bis 1904 eine Seltenheit. Da erschienen die beiden Enzyklopädieartikel von H. A. Lorentz über die Maxwellsche Theorie und die Elektronentheorie. Seitdem gelten die in diesen Artikeln benutzten Vektorensymbole als allgemein verständlich und werden viel benutzt. Die Namen Maxwell und Lorentz sprechen eigentlich nicht gegen die internationale Brauchbarkeit der deutschen Buchstaben. Ueberstreichungen mögen ein willkommener Notbehelf für solche Rechner sein, die keine deutschen Buchstaben schreiben können. Sonst hat man die Ueberstreichungen lieber für andere Zwecke verfügbar, z. B. zur Bezeichnung von Mittelwerten.

2. (Zu 5). Der Ausdruck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$ bedeutet bei Gibbs einen Vektor in Richtung von $\mathfrak{A}$, nach den Vorschlägen des AEF einen Vektor in Richtung von $\mathfrak{C}$. Schnelle Lesbarkeit und Uebersichtlichkeit verlangen, daß der isoliert stehende Vektor die Richtung anzeigt. Fast ist man versucht zu sagen, Gibbs schreibe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{C}$, wenn er $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ meint. Das Uebel wird noch verschlimmert, wenn man den Vektor mit der Richtung $\mathfrak{C}$ so schreibt: $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\mathfrak{C}$.

3. (Zu 6). Die vielgeschmähten eckigen Klammern scheinen mir vor den so dringend empfohlenen zwischengesetzten Multiplikationszeichen ungeheure praktische Vorteile zu haben. Erstens braucht man bei vektorischen Produkten aus mehr als zwei Vektoren ohnehin Klammern, da die vektorische Multiplikation nicht assoziativ ist. Da ist es nur praktisch, die Klammer sofort auch als Multiplikationszeichen zu verwenden. (Bemerkung von Hrn. Hessenberg.) Beispiel:

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C}] = (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\wedge\mathfrak{C}$$

zum Unterschied von

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{A}\wedge(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}).$$

Zweitens haben aber die zwischengesetzten Multiplikationszeichen den schweren praktischen Nachteil, daß sie die Gruppierung der Ausdrücke nach Summanden völlig zerstören. Man vergleiche etwa

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\mathfrak{u} + [\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\mathfrak{v} + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\mathfrak{w},$$

wo man mit einem Blick übersieht, daß man drei Glieder hat, mit

$$\mathfrak{b}\wedge\mathfrak{c}\times\mathfrak{u} + \mathfrak{c}\wedge\mathfrak{a}\times\mathfrak{v} + \mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}\times\mathfrak{w},$$

was auf den ersten Blick wie ein neungliedriger Ausdruck aussieht und erst bei genauerem Hinsehen als dreigliedriger Ausdruck erkannt wird. Diese Gegenüberstellung ist ein vernichtendes Urteil über die zwischengeschobenen Multiplikationszeichen.

Spielreins Modifikation der Umklammerung, die Unterklammerung, halte ich für eine gute Erfindung. Die typographischen Schwierigkeiten sind kaum größer als bei der

[1]) Vergl. diese Zeitschr. 1, 1921, S. 421 bis 422 (Entwurf des AEF); 2, 1922, S. 161 bis 164 (Zuschriften Prandtl, Schrutka, Böhm), S. 227 bis 231 (van Schouten), S. 323 bis 324 (Spielrein). Die Schriftleitung legt Wert darauf, nach fünf Zuschriften, die sich kritisierend mit dem Entwurf des AEF befaßt haben, nunmehr auch ein Mitglied dieses Ausschusses zu Wort kommen zu lassen. Anm. d. Herausg.

vielbenutzten Ueberstreichung. Umklammerung und Unterklammerung können nebeneinander benutzt werden. Mit zwischengeschobenen Multiplikationszeichen kann man nicht, wie mit der Unterklammerung, zum Ausdruck bringen, daß der Axiator sowohl als Linksfaktor wie als Rechtsfaktor gebraucht werden kann:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\underbrace{\mathfrak{B}}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}],$$

dagegen

$$\mathfrak{A}(\wedge\mathfrak{B}) \times \mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B}\wedge)\mathfrak{C}.$$

Beim Uebergang zur Affinorenrechnung ist das ein weiterer schwerwiegender Nachteil der zwischengeschobenen Multiplikationszeichen.

Daß zuweilen über die eckige Klammer hinaus differenziert werden muß, darf nicht gegen sie angeführt werden. Denn die eckige Klammer ist Multiplikationszeichen, nicht Abschlußzeichen.

$\overline{a\,b}$ sollte folgerichtig nicht das vektorische Produkt aus $\overline{a}$ und $\overline{b}$ bedeuten, sondern einen Vektor vom Betrage a b. Die einfache Ueberstreichung zur Bezeichnung des vektorischen Produkts ist außerdem nicht immer ausführbar, z. B.

$$\overline{(\alpha\,\overline{a} + \beta\,\overline{b})\,\overline{c}} \quad \text{gleich} \quad [(\alpha\,\mathfrak{a} + \beta\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}].$$

4. (Zu 5). Könnten bei einem Rückfall in das Hamiltonsche Minuszeichen beim skalaren Produkt die systematischen Vorzüge das praktische Uebel eines versteckten Minuszeichens aufwiegen? Könnte man sich wirklich dazu verstehen, die Konsequenz $\mathfrak{A}^2 = - A^2$ in Kauf zu nehmen? Die Quaternionen kommen in der Physik wohl nur bei der Zusammensetzung von endlichen Drehungen vor. Die Herleitung der skalaren und der vektorischen Multiplikation als Teilmultiplikation einer Hauptmultiplikation ist wohl weder ein didaktischer noch ein praktischer Vorteil. Hr. Schouten sucht das negative Vorzeichen in praktischer Hinsicht durch seine Ueberschiebungsregel zu rechtfertigen. Mit dieser Regel dürfte es so gehen, wie mit den Regeln zur Bestimmung der Kommastellung beim Rechenschieber: Niemand benutzt sie. Man braucht sie nicht.

In diesem Zusammenhang möge daran erinnert werden, daß H. Weber ursprünglich beim Gradienten ein verstecktes Minuszeichen eingeführt hat, indem er den Gradienten als Gefälle erklärte. Lorentz hat bald darauf dieses versteckte Minuszeichen wieder beseitigt.

5. (Zu 9). Hr. Schouten hält die Sprungoperatoren für nebensächlich. In der Elektrizitätslehre sind sie aber fast noch wichtiger als die stetigen Operatoren. Man denke nur an die Elektrizitätsdichte und an die Gradienten der Dielektrizitätskonstante und der Permeabilität. Wenn man lästige Wiederholungen vermeiden will, braucht man in der Elektrizitätslehre z. B. für die räumliche Divergenz und die Flächendiergenz bei allen allgemeinen Sätzen den zusammenfassenden Ausdruck Divergenz schlechthin. Deshalb hat E. Cohn schon 1900 dafür die Zeichen Γ_-, Γ_S, Γ verwendet. Die Zusammengehörigkeit der Beziehungen div $\mathfrak{D} = \varrho$, Div $\mathfrak{D} = \omega$ muß eben auch äußerlich leicht erkennbar sein. Auch kommen Ausdrücke vor wie Div grad φ.

Ueberdies haben die Sprungoperatoren auch außerhalb der Elektrizitätslehre einen hohen didaktischen Wert. Erstens kann man an ihnen ohne alle Konvergenz- und Existenz-Schwierigkeiten alle Begriffe und Regeln rein algebraisch ableiten, die auch bei den stetigen Operatoren gelten. Zweitens sind die Sprungoperatoren ein vortreffliches Mittel, sich von dem wesentlichen Sinn der Operatoren Gradient, Divergenz, Rotor[1]) eine anschauliche Auffassung zu verschaffen. Siehe Spielreins Lehrbuch, S. 30 und 371.

Die vorangehenden Ausführungen sind weder im Auftrage, noch mit Wissen des AEF geschrieben. Sie geben nur meine persönliche Ansicht wieder.

Stuttgart, den 1. November 1922.

Fritz Emde. 230

Eine neue Art von Rechentafeln. Die von Hrn. J. Hak angegebenen Rechentafeln[2]) bieten unleugbare Vorteile bei der Herstellung, insofern sie die Konstruktion von krummen Skalen unnötig machen. Aber es scheint nicht überflüssig, auf die Nachteile und Beschränkungen dieser Tafeln hinzuweisen, da eine entsprechende Bemerkung in der Arbeit des Hrn. Hak nicht enthalten ist.

Wie aus den beiden Beispielen 1 und 2 hervorgeht, sind die Tafeln nur zu benutzen, wenn im ersten Fall z, im zweiten stets U zu den gegebenen Größen gehört. Dagegen ist die Bestimmung dieser beiden Größen aus den andern nicht direkt möglich, sondern wäre es nur durch Probieren. Es müßte nämlich im Falle der Tafel Abb. 3 bei gegebenem H und x durch diese Punkte H und x je ein Strahl gezogen werden, so daß sie sich auf der Z-Skala schneiden und auf der Hilfsgeraden A, B die (im logarithmischen Maßstabe gemessene) Strecke 1 ausschneiden.

Für 3 Variable läßt sich leicht allgemein zeigen, welche der Variablen immer gegeben sein muß. Die in Betracht kommende allgemeine Gleichung zwischen den 3 Veränderlichen ist von der Form

$$f_1(x)\,\varphi(y) + f_2(x)\,\psi(z) + f_3(x) = 0.$$

Sie geht durch Division durch $f_3(x)$ sofort in die für die Haksche Darstellung geeignete Form über

$$\frac{f_1}{f_3}\varphi + \frac{f_2}{f_3}\psi + 1 = 0.$$

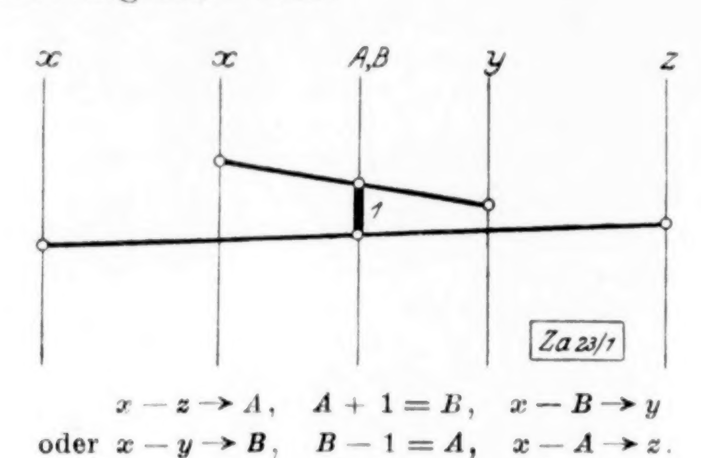
Setzen wir nun

$$\frac{f_2}{f_3}\psi = A\,, \quad \frac{f_2}{f_3}\psi + 1 = A + 1 = B\,,$$

[1]) Ich empfinde es als sprachwidrig, einen Vektor durch das Femininum »Rotation« zu bezeichnen. Dagegen wäre es sehr zu begrüßen, wenn die Mißbildung »vektoriell« allgemein durch die gute deutsche Wortbildung »vektorisch« ersetzt würde.

[2]) Diese Zeitschrift, 1921, Bd. 1, S. 154.

dann findet sich das Schema der Rechentafel nach folgendem Bild:



$$x - z \rightarrow A, \quad A + 1 = B, \quad x - B \rightarrow y$$
oder
$$x - y \rightarrow B, \quad B - 1 = A, \quad x - A \rightarrow z.$$

Aus ihm geht hervor, daß stets x unter den gegebenen Größen sich befinden muß. Im Zusammenhange damit steht, daß die Tafel Abb. 3 bei Hak nicht erkennen läßt, daß für gegebene Werte von x und H sich im allgemeinen zwei Werte von z ergeben. Wie ein Vergleich mit der Tafel bei Pirani zeigt, ist das von Hak eingezeichnete Beispiel $x = 60$, $z = 40$, $H = 108$ gerade einer der Ausnahmefälle, in denen tatsächlich nur ein Wert von z existiert. Pflieger-Haertel. 234

Erwiderung. Die Ausführungen des Herrn Dr. Pflieger-Haertel sind ganz richtig. Die Rechentafel mit nur logarithmischen parallelen Skalen sind in erster Reihe für solche Gleichungen geeignet, aus denen die im praktischen Fall als unbekannt vorliegende Veränderliche in der Form der Gl. (5) meines Aufsatzes berechnet werden kann. Ist dies nicht der Fall, so müßte die gesuchte Größe durch Versuche gefunden werden. Ich dachte auf diesen Umstand in meinem sehr kurz gefaßten Aufsatz nicht näher eingehen zu müssen, da er mir durch die Form der Gleichung (5), S. 155, genügend angedeutet erschien.

J. Hak. 234a

Die Hermannschen Schablonen zur harmonischen Analyse. Zu der Veröffentlichung des Hrn. Lohmann, Bd. 2, 1922, auf S. 153 dieser Zeitschrift habe ich, inbesonders zu den einleitenden Worten, nachstehendes zu bemerken.

Seit 1917 führte ich beim Luftschiffbau Schütte-Lanz in Mannheim die harmonische Analyse periodischer Kurven nach von mir ausgearbeiteten Tafeln aus, die, wie seit einiger Zeit bekannt ist, mit den im Jahre 1890 veröffentlichten Schablonen von Hermann im Grunde übereinstimmen, wenn man von der Anordnung der Grundtafel absieht. Die Tafeln habe ich in Dinglers polytechnischem Journal 1918 S. 201 veröffentlicht. Bei weiterem Gebrauch der Tafeln erkannte ich, daß bei Einteilung der Periode in z. B. 24 Teilen nur die Hälfte der Produktenbildung für die Grundtafel nötig wird. Diese Tatsache, die das Verfahren weiterhin vereinfacht, haben Hermann und Lohmann nicht erkannt. Meine neue Grundtafel ist veröffentlicht in Heft 1 des Jahrganges 1922 von Dinglers polytechnischem Journal. Für den praktischen Gebrauch haben die Tafeln weitere Ausarbeitungen erfahren. Der Verlag Julius Springer in Berlin hat die Herstellung der gebrauchsfertigen Tafeln übernommen und vor kurzem in den Buchhandel gebracht.

Gelsenkirchen, den 25. Januar 1923.

Dr.-Ing. Zipperer. 259

(Die Zuschrift hat Hrn. Lohmann vor Veröffentlichung vorgelegen. Der Herausgeber.)

Zur harmonischen Analyse. In einer weiteren Zuschrift von Hrn. Dr.-Ing. A. Röver, Quedlinburg, wird darauf hingewiesen, daß bei dem in Rede stehenden Verfahren von Hermann der letzte der berechneten Koeffizienten doppelt so groß ausfällt[1]), wie wenn er etwa nach den Vorschriften von Runge[2]) berechnet würde. Die Erklärung dieses auffallenden Verhaltens ist folgende. Man kann, wenn nur eine endliche Zahl von Punkten der zu analysierenden Kurve gegeben ist, sich die Aufgabe stellen, jene durch sinus- und cosinus-Glieder bis zur $n$ten Ordnung darstellbare Kurve zu suchen, die durch die $2n$ gegebenen Punkte hindurchgeht. In diesem Falle kommt man zu dem Rungeschen Resultat. Das Hermannsche Verfahren aber geht von der Aufgabe aus, die $2n$ Koeffizienten als Summen zu bestimmen, durch welche die Integrale, die nach der Eulerschen Regel als Fourier-Koeffizienten zu bilden wären, einigermaßen angenähert werden. Zuverlässig sind beide Verfahren nur dann, wenn die vorgegebene Kurve, grob gesprochen, weit weniger Schwankungen aufweist, als $\sin nx$ oder $\cos nx$; trifft dies nicht zu, so können die Ergebnisse voneinander sehr verschieden sein. Das zeichnerische Verfahren, wie es von Hrn. Friesecke kürzlich dargelegt wurde[3]), ist von dieser Einschränkung frei. Mises. 226

[1]) Vergl. auch diese Zeitschr. 2, 1921, S. 313, Fußnote.

[2]) Runge, Theorie und Praxis der Reihen. Leipzig 1904, S. 151.

[3]) Diese Zeitschr. 2, 1921, S. 313 bis 315.

(Redaktionsschluß 28. Februar 1923.)

Verantwortlich für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.